

Éléments de géométrie différentielle et introduction au calcul variationnel

Cours 1: Variétés différentielles et fibrés vectoriels

B. Kolev

Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS)
Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS

Quiberon, 8-13 septembre 2025

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

4 Fibrés vectoriels

5 Champs de tenseurs

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

4 Fibrés vectoriels

5 Champs de tenseurs

NAISSANCE DU CONCEPT

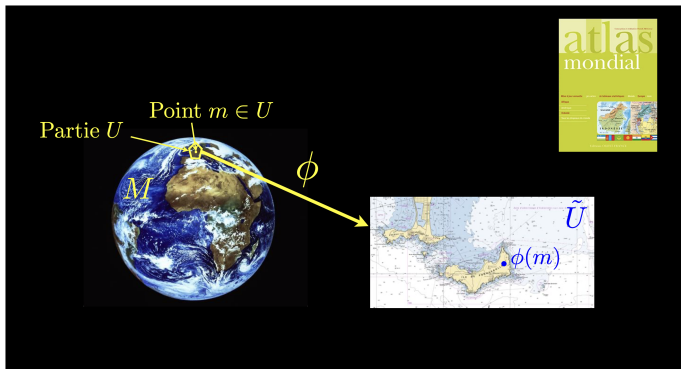
- De manière intuitive la structure de **variété** (*manifolds* en anglais), s'inspire de la cartographie terrestre.
- Pour décrire la surface de la Terre, on utilise des **cartes** qui sont des domaines plans
- Pour décrire l'ensemble de la surface terrestre, on utilise un **atlas**, un ensemble de cartes qui recouvre la surface de la Terre.



CARTES ET ATLAS

Soit M un ensemble.

- Une **carte** de M est un couple (U, ϕ) où $U \subset M$ et $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une bijection de U sur **un ouvert** $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$.
- Un **atlas** $\mathcal{A}$ de M est une famille de cartes (U_i, ϕ_i) telle que $\bigcup_i U_i = M$.

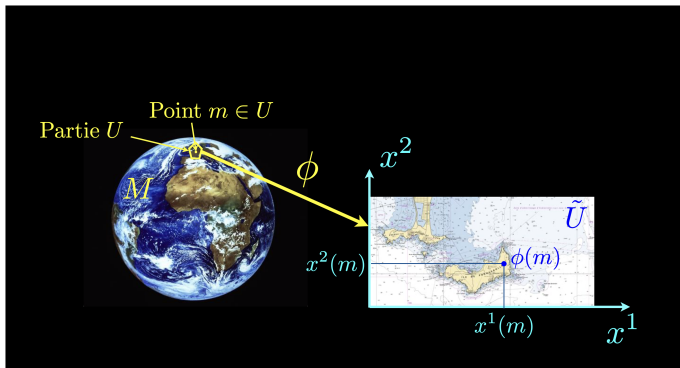


COORDONNÉES LOCALES

- La donnée d'une carte (U, ϕ) permet de définir des coordonnées d'un point $m \in U \subset M$

$$\phi(m) = (x^1(m), \dots, x^n(m)) \in \mathbb{R}^n, \quad m \in U.$$

- Une carte (U, ϕ) équivaut donc à préciser un **système de coordonnées locales** (x^i) sur M .

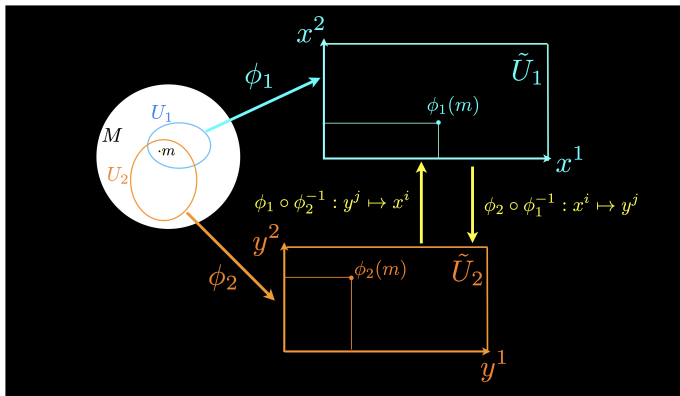


CHANGEMENT DE CARTES

- Soit (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) deux cartes de M . On a alors une application de **changement de cartes**

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n.$$

- Les points de $U_1 \cap U_2$ sont décrits à la fois par les coordonnées (x^i) et (y^j) et on a un changement de coordonnées $x^i \mapsto y^j$.



STRUCTURE DE VARIÉTÉ TOPOLOGIQUE

- Soit $\mathcal{A}$ un atlas sur M . Tant qu'on a pas décrit comment **se recollent** les cartes entre elles, on a rien décrit ! Ces données sont par exemple essentielles à définir dans le logiciel **Sagemanifolds**.
- Le **changement de carte** $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ (ou **changement de coordonnées** $x^i \mapsto y^j$) est *a priori* une application continue inversible.
- La donnée d'un atlas sur M (avec n fixé) définit une structure de **variété topologique** de dimension n sur M .

EXEMPLE : LA SPHÈRE (PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES)

- On considère la sphère S^2 dans $\mathbb{R}^3$

$$S^2 := \{m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- On introduit les deux cartes (qui forment un atlas de S^2)

$$U_1 = S^2 \setminus \{\text{Nord} = (0, 0, 1)\}, \quad \phi_1(m) = (u^1 = \frac{x}{1-z}, u^2 = \frac{y}{1-z})$$

$$U_2 = S^2 \setminus \{\text{Sud} = (0, 0, -1)\}, \quad \phi_2(m) = (v^1 = \frac{x}{1+z}, v^2 = \frac{y}{1+z})$$

- Les changements de carte s'écrivent

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \quad v^i = \frac{u^i}{(u^1)^2 + (u^2)^2},$$

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \quad u^i = \frac{v^i}{(v^1)^2 + (v^2)^2}.$$

COMMENT DÉFINIR UNE FONCTION DIFFÉRENTIABLE SUR M ?

- Soit M une variété topologique. On est tenté de dire que $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si dans une carte locale (U, ϕ) , l'application

$$\tilde{f} := f \circ \phi^{-1}: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x^i) \mapsto \tilde{f}(x^i)$$

est différentiable.

- Effectuons un changement de carte :

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}).$$

- **Problème : cette définition dépend *a priori* de la carte locale choisie !**

Mais si tous les changements de cartes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont différentiables, cette définition ne dépend plus de la carte !

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

- Une **structure de variété différentielle** sur M est la donnée d'un atlas de classe C^∞ , c'est à dire que **tous les changements de cartes sont C^∞** .
- Deux atlas C^∞ $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont **compatibles** si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un atlas C^∞ . Ils définissent alors la même structure de variété différentielle sur M .
- Une variété différentielle est **orientable** si on peut choisir un atlas dont **tous les changements de carte ont un Jacobien positif**.

Variantes :

variétés de classe C^1 , C^2 , ..., variétés complexes, **variétés à bord**, variétés de dimension infinie de Banach, de Fréchet ...

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

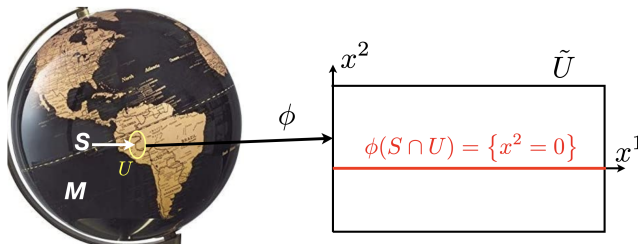
4 Fibrés vectoriels

5 Champs de tenseurs

NOTION DE SOUS-VARIÉTÉ

- Une **sous-variété** est à une variété, ce qu'un sous-espace vectoriel est à un espace vectoriel.
- Une partie S d'une variété M de dimension n est une **sous-variété de M de dimension k** , si pour tout point $m \in S$, il existe une carte (U, ϕ) de M contenant m tel que

$$\phi(S \cap U) = \{ (x^1, \dots, x^n) \mid x^{k+1} = \dots = x^n = 0 \} .$$



EXEMPLES DE SOUS-VARIÉTÉ

- Tout **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dimension n .
- Le **graphe** S d'une application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ est une sous-variété lisse de dimension n de $\mathbb{R}^{n+p}$. En effet, le changement de variables (dans $\mathbb{R}^{n+p}$) :

$$\begin{cases} \tilde{x}^j = x^j, & \text{pour } j = 1, \dots, n; \\ \tilde{x}^{n+j} = x^{n+j} - \phi^j(x^1, \dots, x^n), & \text{pour } j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

permet de **redresser** le graphe S :

$$S = \{ (x^1, \dots, x^{n+p}) \mid \tilde{x}^{n+j} = 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, p \}.$$

THÉORÈME DE LA SUBMERSION

Théorème des fonctions implicites

Soit f une fonction de classe C^k ($k \geq 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$. Soit (x_0, y_0) un point de U tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que la différentielle partielle $d_y f(x_0, y_0)$ soit inversible. Alors, il existe une fonction φ de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, définie sur un voisinage ouvert V de x_0 , et un voisinage ouvert Ω de (x_0, y_0) dans U tels que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$(x, y) \in \Omega \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0 \iff x \in V \quad \text{et} \quad y = \varphi(x).$$

Théorème de la submersion

La fibre $S := f^{-1}(0)$ d'une **submersion** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (i.e. $d_x f$ surjective en tout $x \in S$) est une sous-variété de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$.

Contre-exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. Alors $f^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

4 Fibrés vectoriels

5 Champs de tenseurs

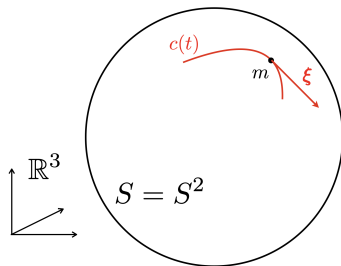
ESPACE TANGENT EN UN POINT

CAS D'UNE SOUS-VARIÉTÉ DE $\mathbb{R}^n$

Définition

Si S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, un vecteur ξ de $\mathbb{R}^n$ est dit **tangent** à S au point $m \in S$ si il existe une courbe lisse $c(t)$ tracée sur S telle que

$$c(0) = m, \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = \xi.$$



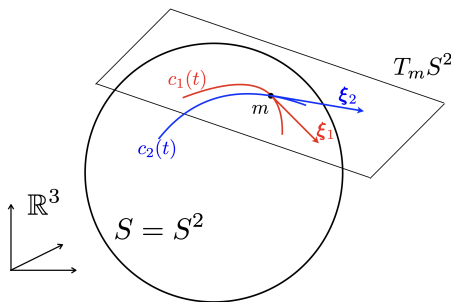
ESPACE TANGENT EN UN POINT

CAS D'UNE SOUS-VARIÉTÉ DE $\mathbb{R}^n$

Définition

Si S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, un vecteur ξ de $\mathbb{R}^n$ est dit **tangent** à S au point $m \in S$ si il existe une courbe lisse $c(t)$ tracée sur S telle que

$$c(0) = m, \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = \xi.$$



ESPACE TANGENT EN UN POINT

CAS GÉNÉRAL

- La construction précédente s'étend dans le cadre des variétés différentielles abstraites mais elle est plus technique.
- Un **vecteur tangent** ξ_m à M au point m est une classe d'équivalence $\xi_m = [c]$ de courbes lisses $c : I \rightarrow M$ pour la relation d'équivalence :

$$c_1 \underset{m}{\sim} c_2 \quad \text{ssi} \quad (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

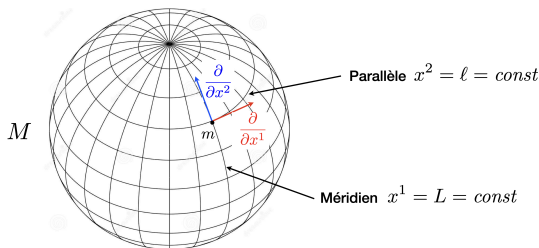
où (U, ϕ) est une carte locale contenant m .

- L'**espace tangent** $T_m M$ est l'ensemble des vecteurs tangents au point m . C'est un espace vectoriel de dimension $n = \dim M$.

VECTEURS TANGENTS AUX LIGNES DE COORDONNÉES

- Soit (x^i) un système de coordonnées locales autour d'un point m .
- A chaque ligne de coordonnée x^i correspond un vecteur tangent noté

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{ou} \quad \partial_{x^i} \quad \text{ou simplement} \quad \partial_i$$



BASES ET BASES DUALES LOCALES

- Les vecteurs tangents (∂_{x^i}) forment une base de l'espace tangent $T_m M$, en tout point m couvert par la carte.
- Un vecteur tangent $\xi \in T_m M$ s'écrit donc localement

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_{x^i}, \quad \text{matriciellement,} \quad \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

- La base duale correspondante est notée (dx^i) . Elle est caractérisée par

$$dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i.$$

- Un vecteur cotangent $\alpha \in T_m^* M$ s'écrit donc localement

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i, \quad \text{matriciellement,} \quad (\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n)$$

VARIÉTÉS DE DIMENSION INFINIE

La théorie des variétés différentielles peut être étendue en dimension infinie, c'est à dire en prenant des cartes à valeur dans un même espace vectoriel E de dimension infinie.

Exemple : l'espace des configurations en MMC

- C'est l'ensemble des plongements C^∞ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$, noté $\text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$. C'est un ouvert de l'espace vectoriel $C^\infty(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ (de dimension infinie) des applications C^∞ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$.
- L'espace tangent $T_p \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ est l'ensemble des déplacements Lagrangiens virtuels

$$T_p \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) := \{V = \partial_s p(0); p(s, X) \text{ tel que } p(0) = p\}.$$

- Le cotangent $T_p^* \text{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ est l'ensemble des puissances (ou travaux) virtuelles.

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

- Une application $\varphi: M \rightarrow N$ est **différentiable** si, pour toute carte (U, ϕ_U) de M et (V, ϕ_V) de N , l'application

$$\tilde{\varphi} := \phi_V \circ \varphi \circ \phi_U^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$$

est différentiable.

- Cela signifie que son expression locale à travers des coordonnées (X^I) sur M et (x^j) sur N

$$\tilde{\varphi}: X^I \mapsto x^j = \tilde{\varphi}^j(X^I)$$

est différentiable.

APPLICATION LINÉAIRE TANGENTE

- Une application différentiable $\varphi: M \rightarrow N$ entre deux variétés différentielles envoie les courbes différentiables passant par $m \in M$ en courbes différentiables passant par $\varphi(m) \in N$.
- En dérivant ces courbes au point m , on obtient une application linéaire

$$T_m\varphi: T_mM \rightarrow T_{\varphi(m)}N,$$
$$\delta\mathbf{X} \mapsto \delta\mathbf{x} = T_m\varphi.\delta\mathbf{X}$$

C'est l'**application linéaire tangente** (appelée gradient de la transformation en mécanique).

- En coordonnées locales, (X^I) sur $M = \Omega_0$ et (x^i) sur $N = \Omega$, cette application linéaire $\mathbf{F} = T_m\varphi$ s'écrit

$$\delta x^i = F^i_J \delta X^J, \quad \text{où} \quad F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}.$$

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

4 Fibrés vectoriels

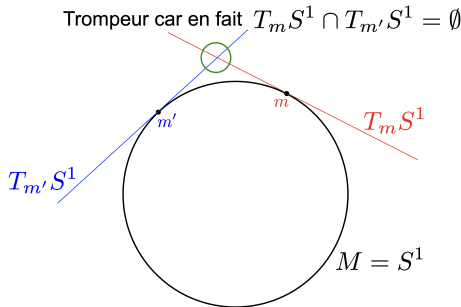
5 Champs de tenseurs

LE FIBRÉ TANGENT

- Le **fibré tangent** est l'union (**disjointe**) de tous les espaces tangents

$$TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M.$$

- TM est également une **variété différentielle mais de dimension $2n$** .
- Coordonnées locales : $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$, où (x^i) paramètre le point $m \in M$ et (ξ^i) paramètre le vecteur $\xi = \sum \xi^i \partial_{x^i}$ dans $T_m M$.



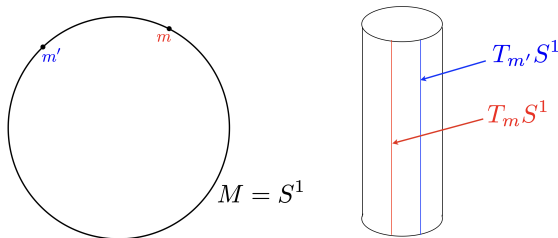
LE FIBRÉ TANGENT

- Le **fibré tangent** est l'union (**disjointe**) de tous les espaces tangents

$$TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M.$$

- TM est également une **variété différentielle mais de dimension $2n$** .
- Coordonnées locales : $(x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$, où (x^i) paramètre le point $m \in M$ et (ξ^i) paramètre le vecteur $\xi = \sum \xi^i \partial_{x^i}$ dans $T_m M$.

$$TM = TS^1:$$



LE CONCEPT EURISTIQUE D'ESPACE FIBRÉ EN MÉCANIQUE

En mécanique, le concept d'**espace fibré** est illustré *via* le paradigme des **milieux condensés** : la poutre, la plaque, la coque.

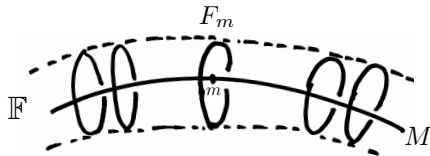


Figure – La poutre comme image mentale d'un espace fibré

ESPACES FIBRÉS (EN MATHS)

- Un **espace fibré** $\mathbb{F}$ de base M et de fibre type F est une variété différentielle qui est une union disjointe de variétés F_m , indexée par une variété M ,

$$\mathbb{F} = \bigsqcup_{m \in M} F_m,$$

où chaque F_m est isomorphe à une **fibre type** F , et qui possède une structure différentiable qui s'écrit localement (**mais, en général, pas globalement**) :

$$M \times F.$$

- Un espace fibré se représente par un diagramme

$$\mathbb{F} \xrightarrow{\pi} M$$

où $\pi : \xi_m \mapsto m$ est la **projection canonique**.

TRADUCTION MATHS/MÉCA DU CONCEPT D'ESPACE FIBRÉ

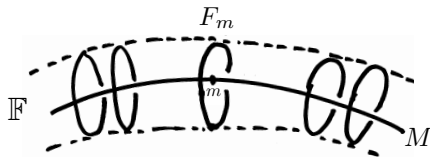


Figure – Une poutre *versus* un espace fibré

- Le fibré $\mathbb{F}$ correspond ici à la poutre (l'**espace total**, la **structure**).
- La **variété de base** M correspond à la **ligne moyenne / fibre neutre**.
- La **fibre** F_m correspond à la **section droite**.
- La **fibre type** F correspond à un modèle topologique de la fibre F_m (**une section droite "qui reste droite"**).

Pour une plaque $\mathbb{F}$ d'épaisseur h , M est la surface moyenne de la plaque et les fibres F_m sont les segments de longueur h en tous points m de la plaque.

FIBRÉS VECTORIELS

UN ESPACE FIBRÉ DONT LES FIBRES SONT DES ESPACES VECTORIELS

- Un **fibré vectoriel** $\mathbb{E}$ de base M et de fibre type E (un **espace vectoriel**) est une union d'espaces vectoriels, indexée par une variété M

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{m \in M} E_m,$$

où chaque E_m est isomorphe à E et qui possède une structure différentiable qui s'écrit localement (**mais, en général, pas globalement**)

$$M \times E.$$

- Un fibré vectoriel se représente par un diagramme

$$\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} M, \quad \mathbf{v}_m \mapsto m.$$

Exemple :

Le **fibré tangent** TM d'une variété de dimension n est un fibré vectoriel de base M et de fibre type est $E = \mathbb{R}^n$.

LIGNES DIRECTRICES

1 Variétés différentielles

2 Sous-variétés

3 Espace tangent

4 Fibrés vectoriels

5 Champs de tenseurs

SECTIONS D'UN FIBRÉ VECTORIEL

- Une **section** s d'un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ est une application $s : M \rightarrow \mathbb{E}$

$$\begin{array}{c} \mathbb{E} \\ \downarrow \pi \\ M \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow s \\ \searrow \end{array}$$

telle que $s(m) \in E_m$ pour tout $m \in M$ (autrement dit $\pi \circ s = \text{Id}$).

- Dans une trivialisation locale $U \times E \subset \mathbb{E}$ du fibré (où U ouvert de M), une section s'écrit

$$s : U \rightarrow U \times E, \quad m \mapsto (m, \mathbf{v}(m)),$$

où $\mathbf{v}$ est une fonction vectorielle.

Notations

Attention, en général on note $\mathbf{v}_m$ un élément de $E_m \subset \mathbb{E}$ pour préciser le point de base m , alors que $\mathbf{v}(m)$ est une fonction vectorielle à valeur dans l'espace vectoriel E .

EXEMPLE : CHAMPS DE VECTEURS

- Un **champ de vecteurs** $\mathbf{X}$ sur M est une section du fibré tangent TM .
- A tout système de coordonnées locales (x^i) de M correspond une expression locale de $\mathbf{X}$ qui s'écrit

$$\mathbf{X}(m) = \sum_{i=1}^n X^i(x^k) \partial_{x^i}, \quad m = (x^k),$$

où (∂_{x^i}) est la base locale de TM associée au coordonnées (x^i) et (dx^i) est la base duale :

$$dx^i(\mathbf{X}) = X^i.$$

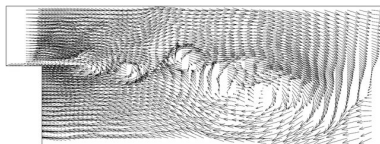


Figure – Exemple : champ des vitesses d'un fluide turbulent

FLOT D'UN CHAMP DE VECTEURS

Un champ de vecteurs X définit une équation différentielle ordinaire

$$\dot{c}(t) = X(c(t)).$$

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit X un champ de vecteurs de classe C^k ($k \geq 1$). Alors, pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de $\mathbf{x}_0$ et $\varepsilon > 0$ tel que le problème initial

$$\dot{c}(t) = X(c(t)), \quad c(0) = \mathbf{x}$$

avec $\mathbf{x} \in U$ admet une solution $c(t)$ de classe C^{k+1} sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$. Cette solution est unique et dépend de manière C^k de la condition initiale.

La solution $c(t)$ se note $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi^t(\mathbf{x})$, où t est le temps et $\mathbf{x}$ est la condition initiale. L'application φ est définie sur un voisinage de $t = 0$ et de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ et vérifie $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. C'est le **flot** de X . φ^t est un difféomorphisme local.

ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS

Soit X un champ de vecteurs sur M , on définit l'opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto \mathcal{L}_X f := df \cdot X = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

- $\mathcal{L}_X$ est une **dérivation** sur $C^\infty(M)$:

$$\mathcal{L}_X(fg) = f(\mathcal{L}_X g) + (\mathcal{L}_X f)g, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

- Si X et Y sont deux champs de vecteurs, alors $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ est aussi une dérivation qui s'écrit $\mathcal{L}_{[X, Y]}$ où le champ de vecteurs $[X, Y]$, appelé **crochet de Lie** des champs X et Y , est défini par :

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

L'espace vectoriel $\text{Vect}(M)$ muni de ce crochet est une **algèbre de Lie** :

- 1 $[Y, X] = -[X, Y]$ (antisymétrie),
- 2 $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi).

REPÈRES MOBILES INTÉGRABLES

- Pour tout système de coordonnées locales (x^i) , on a toujours

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0, \quad \forall i, j.$$

- En particulier, un repère mobile local (e_i) ne dérive pas toujours d'un système de coordonnées locales (*i.e.* $e_i = \partial_{x^i}$) !
- Une condition nécessaire et suffisante pour cela est justement que

$$[e_i, e_j] = 0, \quad \forall i, j.$$

Exemple : repère local orthonormé sur la sphère

Si (e_1, e_2) est un repère orthonormé local sur la sphère, **il n'existe aucun système de coordonnées locales (x^i) pour lequel $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.**

EXEMPLE : CHAMPS DE TENSEURS

- Un **champ de tenseurs covariants** ε d'ordre 2 sur M est une section du fibré tangent $T^*M \otimes T^*M$. Il s'écrit localement

$$\varepsilon = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(x^k) dx^i \otimes dx^j.$$

- Un **champ de tenseurs contravariants** σ d'ordre 2 sur M est une section du fibré tangent $TM \otimes TM$. Il s'écrit localement

$$\sigma = \sum_{i,j} \sigma^{ij}(x^k) \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}.$$

- Une section $s = L$ du fibré tangent $TM \otimes T^*M$ est un **champ de tenseurs mixtes** d'ordre 2 sur M . Il s'écrit localement

$$L = \sum_{i,j} L^i_j(x^k) \partial_{x^i} \otimes dx^j.$$

par exemple $L = \nabla \mathbf{u} = (u^i_{;j})$ en mécanique.

MÉTRIQUES RIEMANNIENNES

- Une **métrique riemannienne** sur M est un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 **symétrique et défini positif en tout point**, autrement dit un **champ de produits scalaires** sur chaque espace tangent $T_m M$.
- Dans tout système de coordonnées locales, une métrique riemannienne est représentée par la matrice de ses composantes $[G] := (g_{ij})$ appelée la **matrice de Gram**.
- En introduisant la notation suivante pour le **produit tensoriel symétrisé**

$$dx^i dx^j = dx^j dx^i := \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i),$$

on la trouve également dans la littérature dénommée par **première fondamentale** et écrite (en utilisant la convention d'Einstein) :

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

ISOMORPHISMES MUSICAUX

- Sur une variété riemannienne (M, g) , on peut **monter et descendre les indices** à l'aide des **isomorphismes musicaux**. Par exemple,
- Si $\mathbf{X} = (X^i)$ est un champ de vecteurs, $\mathbf{X}^\flat = g\mathbf{X} = (g_{ij}X^j)$ est un champ de covecteurs.
- Si $\alpha = (\alpha_i)$ est un champ de covecteurs, $\alpha^\sharp = g^{-1}\alpha = (g^{ij}\alpha_j)$ est un champ de vecteurs, où (g^{ij}) sont les composantes de la *co-métrique* g^{-1} .
- On pourra observer que

$$g: TM \rightarrow T^*M, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}^\flat, \quad \text{et} \quad g^{-1}: T^*M \rightarrow TM, \quad \alpha \mapsto \alpha^\sharp.$$

- De même, pour des tenseurs d'ordre 2, on définit

$$\sigma^\flat = g\sigma g = (g_{ik}\sigma^{kl}g_{lj}) \quad \text{et} \quad \varepsilon^\sharp = g^{-1}\varepsilon g^{-1} = (g^{ik}\varepsilon_{kl}g^{lj}).$$

LECTURES COMPLÉMENTAIRES I

 M. Epstein.
Differential Geometry.
Mathematical Engineering. Springer, Cham, 2014.

 M. Spivak.
A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.
Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

 J. E. Marsden and T. J. R. Hughes.
Mathematical Foundations of Elasticity.
Dover Publications, Inc., New York, 1994.

 D. Bleeker.
Gauge theory and variational principles.
Addison-Wesley Publishing Co, 1981.

LECTURES COMPLÉMENTAIRES II



B. Kolev.

Éléments de géométrie différentielle à l'usage des mécaniciens.

Méthodes Géométriques en Mécanique, Quiberon, Septembre 2016.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03330418/file/GDM.pdf>.



E. Gourgoulhon.

Sagemanifolds : Differential geometry and tensor calculus with sagemath, 2005.

<https://sagemanifolds.obspm.fr/>.



J. M. Souriau

La relativité variationnelle

Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A , Vol. 5 p. 103-170, 1958.