

Éléments de géométrie différentielle et introduction au calcul variationnel

Cours 3: groupes et algèbres de Lie

B. Kolev

Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS)
Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS

Quiberon, 8-13 septembre 2025

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie
- 3 Champs de tenseurs invariants
- 4 Application exponentielle
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie
- 3 Champs de tenseurs invariants
- 4 Application exponentielle
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété

INTRODUCTION GÉNÉRALE

- La notion de **groupe** en mathématique permet de donner un sens rigoureux au concept, issu du langage naturel : « **le même** ».
- Le concept de groupe a été formalisé dans les années 1850 par Arthur Cayley, bien que des prémisses de celui-ci soient déjà présents chez Joseph-Louis Lagrange (1771) et Évariste Galois (1830).
- En 1872, Felix Klein présente son fameux **programme d'Erlangen** qui fait le lien entre la géométrie et la théorie des groupes. La conclusion fondamentale issue de ce programme est révolutionnaire sur le plan paradigmatique et se résume à la découverte suivante : **Une géométrie c'est un groupe !**
- En physique, Albert Einstein révolutionne le concept de physique d'une manière analogue, en introduisant la **relativité restreinte**, puis la **relativité générale**, ce qui amènera Jean-Marie Souriau (1922–2012) à conclure, en paraphrasant Felix Klein : **Une physique c'est un groupe !**

NOTION DE GROUPE

Définition (Cayley 1854)

Un groupe est un ensemble non vide G , muni d'une loi de composition interne vérifiant les **axiomes** suivants :

- 1 **Associativité** : pour tout $a, b, c \in G$, on a $(ab)c = a(bc)$,
- 2 **Élément neutre** : il existe $e \in G$ tel que $ae = ea = a$, pour tout $a \in G$,
- 3 **Inverse** : pour tout $a \in G$, il existe un élément $b \in G$ tel que $ab = ba = e$. Cet élément b est alors unique, on le note a^{-1} .

Si de plus $ab = ba$ pour tous $a, b \in G$, on dit que le groupe est **commutatif** ou **abélien**.

Exemples

- 1 $\text{Bij}(X)$, l'ensemble des bijections d'un ensemble X ,
- 2 $\text{GL}(E)$, l'ensemble des transformations linéaires inversibles d'un espace vectoriel E ,

MORPHISMES DE GROUPE

Définition

- Un **morphisme de groupe** est une application $f: G_1 \rightarrow G_2$, entre deux groupes G_1, G_2 , qui vérifie :

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G_1.$$

- Un **isomorphisme de groupe** est un morphisme de groupe bijectif. L'inverse est alors également un morphisme de groupe.

Exemple

L'application

$$\mathrm{GL}(d) \rightarrow \mathbb{R}^* \quad A \mapsto \det A,$$

où $\mathrm{GL}(d)$ est muni de la multiplication matricielle et $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est muni de la multiplication des réels, est un morphisme de groupe car

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ACTION D'UN GROUPE SUR UN ENSEMBLE

Définition

Soit G un groupe et X un ensemble. Une **action** (à gauche) de G sur X est une application

$$\varphi: G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto \varphi(g, x) = g \star x$$

telle que :

- ① $e \star x = x$, pour tout $x \in X$,
- ② $(g_1 g_2) \star x = g_1 \star (g_2 \star x)$, pour tout $x \in X$ et tout $g_1, g_2 \in G$.

Action à droite

Une **action à droite** de G sur X est définie en remplaçant (2) par :

$$(g_1 g_2) \star x = g_2 \star (g_1 \star x).$$

EXEMPLE : QUELQUES ACTIONS (À GAUCHE) DU GROUPE $GL(d)$

- ❶ son action sur les matrices colonnes de $\mathbb{R}^d$ (**vecteurs contravariants**) :

$$GL(d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{C}) \mapsto \mathbf{QC},$$

- ❷ son action sur les matrices lignes de $\mathbb{R}^d$ (**vecteurs covariants**) :

$$GL(d) \times (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*; \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{L}) \mapsto \mathbf{LQ}^{-1},$$

- ❸ son action sur $M_d(\mathbb{R})$, l'espace des matrices $d \times d$ (**tenseurs covariants d'ordre 2**) :

$$GL(d) \times M_d(\mathbb{R}) \rightarrow M_d(\mathbb{R}); \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{M}) \mapsto \mathbf{Q}^{-\top} \mathbf{M} \mathbf{Q}^{-1},$$

- ❹ son action sur $M_d(\mathbb{R})$, l'espace des matrices $d \times d$ (**tenseurs mixtes d'ordre 2**) :

$$GL(d) \times M_d(\mathbb{R}) \rightarrow M_d(\mathbb{R}); \quad (\mathbf{Q}, \mathbf{M}) \mapsto \mathbf{QM} \mathbf{Q}^{-1}.$$

UNE ACTION DE GROUPE EST UN MORPHISME

- Une **action à gauche** φ de G sur X correspond à un **morphisme de groupe** :

$$\varphi: G \rightarrow \text{Bij}(X), \quad g \mapsto \varphi(g, \cdot),$$

du groupe G dans le groupe $\text{Bij}(X)$, des bijections de X .

- En effet, les axiomes définissant une action φ du groupe G sur X sont équivalents aux propriétés
 - ❶ $\varphi(e) = \text{id}_X$,
 - ❷ $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, pour tout $g_1, g_2 \in G$.

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie**
- 3 Champs de tenseurs invariants
- 4 Application exponentielle
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété

GROUPES DE LIE

Définition (Groupe de Lie)

Un **groupe de Lie** est un groupe G qui est également une variété de classe C^∞ et tel que les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g, h) \mapsto gh$ soient C^∞ .

Exemples

- Les sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbb{R})$, *i.e.* les **groupes classiques**, comme le groupe des rotations $SO(3)$.
- Le **groupe des difféomorphismes**, $\text{Diff}(M)$ d'une variété différentielle compacte M .

ESPACE TANGENT À L'ÉLÉMENT NEUTRE

Dans un groupe de Lie G , il y a un élément particulier : l'élément neutre e . L'espace tangent $T_e G$ à G au point e , noté $\mathfrak{g}$ ou $Lie(G)$ s'appelle l'algèbre de Lie du groupe G .

Exemples

- L'algèbre de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, notée $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, est l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées de taille $n \times n$.
- L'algèbre de Lie du groupe des rotations $SO(3)$, notée $\mathfrak{so}(3)$, est l'espace des matrices 3×3 antisymétriques.
- L'algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ est l'espace des champs de vecteurs $\text{Vect}(M)$ sur M .

Rappel

En pratique, l'espace tangent $T_e G$ est constitué de toutes les variations $\dot{g}(0)$ où $g(t)$ est une courbe sur G tel que $g(0) = e$.

CROCHET DE LIE SUR $\mathfrak{g}$

Théorème

L'espace tangent $\mathfrak{g} = T_e G$ possède une *structure d'algèbre de Lie*, c'est-à-dire qu'il existe une application bilinéaire $(u, v) \mapsto [u, v]$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que :

- 1 $[u, v] = -[v, u]$ (antisymétrie),
- 2 $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ (identité de Jacobi).

Ce crochet de Lie se calcule en trois étapes :

- 1 On calcule d'abord

$$I_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

- 2 puis son application linéaire tangente $T_e I_g$, notée $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$:

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \text{Ad}_g = T_e I_g,$$

- 3 et enfin l'application linéaire tangente $T_e \text{Ad}$, notée ad de Ad en e :

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad u \mapsto \text{ad}_u = T_e \text{Ad} . u.$$

Le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est alors défini par $[u, v] := \text{ad}_u v$.

EXEMPLE : ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE $GL(n, \mathbb{R})$

Le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ s'obtient par deux dérivations successives à partir de l'opération de conjugaison

$$I_P: Q \mapsto PQP^{-1}, \quad P, Q \in GL(n, \mathbb{R}).$$

- En dérivant $I_P: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ au point I , on obtient :

$$\text{Ad}_P = T_I I_P: M \mapsto PMP^{-1}.$$

- En dérivant $\text{Ad}: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ au point I , on obtient alors le crochet de Lie

$$[N, M] := (T_I \text{Ad} . N)(M) = NM - MN.$$

EXEMPLE : ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE $\mathrm{SO}(3)$

Le calcul est le même que pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. On obtient

$$[\Omega_1, \Omega_2]_{\mathfrak{so}(3)} = \Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{so}(3).$$

Isomorphisme d'algèbre de Lie entre $(\mathbb{R}^3, \times)$ et $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{so}(3)})$

Il existe un isomorphisme bien connu entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{so}(3)$ donné par

$$j : \omega \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \Omega, \quad \Omega \mathbf{x} = \omega \times \mathbf{x}.$$

On peut montrer que j est un **isomorphisme d'algèbre de Lie**, c'est-à-dire que :

$$j(\omega_1 \times \omega_2) = [j(\omega_1), j(\omega_2)]_{\mathfrak{so}(3)} = j(\omega_1)j(\omega_2) - j(\omega_2)j(\omega_1).$$

Les ω sont les **vecteurs instantanés de rotation des mécaniciens**.

EXEMPLE : ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE $\text{Diff}(M)$

Le crochet de Lie sur $\text{Lie}(\text{Diff}(M))$ s'obtient par deux dérivations successives à partir de l'opération :

$$I_\varphi : \psi \mapsto \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}, \quad \varphi, \psi \in \text{Diff}(M).$$

- En dérivant $I_\varphi : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(M)$ au point id , on obtient :

$$\text{Ad}_\varphi : X \mapsto T\varphi.X \circ \varphi^{-1} = (\varphi)_*X = (\varphi^{-1})^*X, \quad X \in \text{Vect}(M).$$

- En dérivant $\text{Ad} : \varphi \mapsto (\varphi^{-1})^*X$ au point id , on obtient alors le crochet de Lie

$$[X, Y]_{\text{Lie}(\text{Diff}(M))} = -[X, Y]_{\text{Vect}(M)}, \quad X, Y \in \text{Vect}(M).$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie
- 3 Champs de tenseurs invariants**
- 4 Application exponentielle
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété

TRANSLATIONS À GAUCHE ET À DROITE SUR G

Définition

Soit G un groupe de Lie. Il agit sur lui-même de plusieurs façons :

- ① par **translation à gauche** (action à gauche)

$$(g, h) \mapsto L_g(h) := gh, \quad G \times G \rightarrow G,$$

- ② par **translation à droite** (action à droite)

$$(g, h) \mapsto R_g(h) := hg, \quad G \times G \rightarrow G.$$

Ces deux transformations L_g et R_g sont des difféomorphismes de G .

Si G est commutatif, ces deux opérations coïncident. Pour $G = (\mathbb{R}^n, +)$:

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = R_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

d'où cette dénomination.

CHAMPS INVARIANTS À GAUCHE/ À DROITE

Définition

Soit G un groupe de Lie.

- Un champ de tenseurs $\mathbf{T}$ sur G est **invariant à gauche** si

$$L_g^* \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad \forall g \in G.$$

- Un champ de tenseurs $\mathbf{T}$ sur G est **invariant à droite** si

$$R_g^* \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad \forall g \in G.$$

Un champ de tenseurs invariant est entièrement déterminé par sa valeur en l'élément neutre e . Par exemple, un champ de vecteur invariant à gauche s'écrit

$$X_u(g) = T_e L_g \cdot u, \quad u = X(e) \in \mathfrak{g}.$$

DÉFINITION ALTERNATIVE DE L'ALGÈBRE DE LIE

- Le pullback et le crochet de Lie des champs de vecteurs commutent

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y].$$

- On en déduit que le crochet de Lie $[X_u, X_v]$ de deux champs invariants à gauche X_u, X_v est invariant à gauche et on pose

$$[u, v]_{\mathfrak{g}} = [X_u, X_v](e).$$

Cette définition coïncide avec la définition précédente du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$.

PARALLÉLISME SUR UN GROUPE DE LIE

Théorème

Tout groupe de Lie G est **parallélisable** : son fibré tangent TG est isomorphe au fibré trivial $G \times \mathfrak{g}$. Cet isomorphisme s'écrit

$$TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad \xi_g \mapsto (g, T_g L_{g^{-1}} \cdot \xi_g).$$

L'application $g \mapsto \omega_g$ avec

$$\omega_g(\xi_g) = T_g L_{g^{-1}} \cdot \xi_g \in \mathfrak{g}$$

est la **forme de Maurer-Cartan**. C'est une 1-forme vectoriel à valeur dans $\mathfrak{g}$, invariante :

$$L_h^* \omega = \omega, \quad \forall h \in G.$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie
- 3 Champs de tenseurs invariants
- 4 Application exponentielle**
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété

APPLICATION EXPONENTIELLE DU GROUPE LINÉAIRE

Définition

Soit $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. L'**application exponentielle** est défini par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \quad \exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

On peut montrer que si H est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et si $\mathfrak{h}$ désigne son algèbre de Lie, alors

$$A \in \mathfrak{h} \implies \exp(A) \in H.$$

Exemple

Soit $A \in \mathfrak{so}(3)$, alors $A^\top = -A$ et

$$\exp(A) \exp(A)^\top = \exp(A) \exp(A^\top) = \exp(A) \exp(-A) = I,$$

donc $\exp(A) \in \mathrm{SO}(3)$ (car $\det \exp(A) = +1$).

APPLICATION EXPONENTIELLE D'UN GROUPE DE LIE QUELCONQUE

Si G est un groupe de Lie quelconque, la définition précédente ne s'applique plus. Toutefois que si on pose $g(t) = \exp(tA)$, alors $g(t)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\dot{g}(t) = \exp(tA)A = g(t)A, \quad g(0) = I.$$

Autrement dit $g(t) = \varphi_A(t, I)$ où φ_A est le flot du champ de vecteur invariant à gauche $X_A(g) = gA$. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition

On appelle **application exponentielle** du groupe de Lie G , l'application

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad u \mapsto \exp(u) := \varphi_u(1, e)$$

où $\varphi_u(t, g)$ est le flot du champ de vecteur invariant à gauche X_u .

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Groupes et action de groupes
- 2 Groupes et algèbre de Lie
- 3 Champs de tenseurs invariants
- 4 Application exponentielle
- 5 Action d'un groupe de Lie sur une variété**

ACTION DIFFÉRENTIABLE DE G SUR M

Définition

Une action différentiable (à gauche) d'un groupe de Lie G sur une variété M est une application lisse

$$\psi : G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto \psi(g, x) = g \star x$$

telle que :

$$e \star x = x, \quad (g_1 g_2) \star x = g_1 \star (g_2 \star x),$$

pour tout $x \in M$ et tout $g_1, g_2 \in G$.

Cas d'une variété M compacte

Une action de G sur M s'interprète comme un **morphisme de groupe de Lie**

$$\tilde{\psi} : G \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto \tilde{\psi}(g) := \psi(g, \cdot).$$

ACTION INFINITÉSIMALE

Définition

Étant donnée une action différentiable (à gauche) de G sur M , on introduit l'**action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ sur M** , qui associe à tout vecteur $u \in \mathfrak{g}$ le champ de vecteurs $X_u \in \text{Vect}(M)$ défini par :

$$X_u(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \psi(\exp(tu), x).$$

Propriétés

Cette action infinitésimale possède les propriétés suivantes :

- ❶ $X_{u+v} = X_u + X_v$,
- ❷ $X_{[u,v]_{\mathfrak{g}}} = -[X_u, X_v]_{\text{Vect}(M)}$,

qu'on interprète comme un (anti-)morphisme d'algèbre de Lie

$$u \mapsto X_u, \quad \mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M).$$