

Éléments de géométrie différentielle et introduction au calcul variationnel

Cours 4: Dérivées covariantes et problème des géodésiques

B. Kolev

Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS)
Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS

Quiberon, 8-13 septembre 2025

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques
- 3 Divergence
- 4 Pullback d'une dérivée covariante
- 5 Le problème des géodésiques

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques
- 3 Divergence
- 4 Pullback d'une dérivée covariante
- 5 Le problème des géodésiques

DÉRIVÉE COVARIANTE

- Sur une variété M , il n'y a pas de manière naturelle de dériver un champ de vecteurs.
- La notion de **dérivée covariante** généralise la notion de Jacobienne d'une fonction vectorielle dans $\mathbb{R}^n$.

Définition

Une **dérivée covariante** sur M est une application bilinéaire

$$\nabla : \text{Vect}(M) \times \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M), \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y},$$

telle que :

$$\nabla_f \mathbf{X} \mathbf{Y} = f(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}), \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{X}}(f \mathbf{Y}) = (df \cdot \mathbf{X}) \mathbf{Y} + f(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}),$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

TORSION ET COURBURE

Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété M .

Tenseur de torsion $\mathbf{T} = (T_{ij}^k)$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Vect}(M).$$

∇ est **symétrique** si $\mathbf{T} = 0$.

Tenseur de courbure $\mathbf{R} = (R_{ijk}^l)$

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \text{Vect}(M),$$

∇ est **plate** si $\mathbf{T} = 0$ et $\mathbf{R} = 0$.

EXEMPLES

Dérivée covariante canonique sur $\mathbb{R}^n$

- Elle est définie par

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} := d\mathbf{Y}.\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Vect}(\mathbb{R}^n),$$

où $d\mathbf{Y}$ est la jacobienne de $\mathbf{Y}$.

- En mécanique, elle est aussi notée $\nabla\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ ou parfois $(\overline{\overline{\text{grad}\mathbf{Y}}})\mathbf{X}$.
- Elle est plate ($\mathbf{T} = 0$ et $\mathbf{R} = 0$).

Dérivée covariante sur une surface S de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$

- Elle est définie par

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} := (d\mathbf{Y}.\mathbf{X})^{\top} \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Vect}(S),$$

où $(d\mathbf{Y}.\mathbf{X})^{\top}$ est la projection orthogonale de $(d\mathbf{Y}.\mathbf{X})$ sur TS .

- Elle est symétrique ($\mathbf{T} = 0$) mais pas plate ($\mathbf{R} \neq 0$) en générale.

COMPOSANTES LOCALES D'UNE DÉRIVÉE COVARIANTE

- Soit (x^i) des coordonnées locales sur M . Les **symboles de Christoffel**

$$\Gamma_{ij}^k := \left(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} \right)^k$$

sont les composantes locales de la dérivée covariante ∇ .

- Dans un changement de coordonnées $(x^i) \mapsto (y^j)$, on a

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^q} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^p} \right) \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \right) \Gamma_{ij}^k + \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q} \right) \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \right).$$

Les Γ_{ij}^k **ne se comportent donc pas comme les composantes d'un champ de tenseur !**

- ∇ est symétrique ssi

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

EXTENSION AUX CHAMPS DE TENSEURS

Une dérivée covariante ∇ sur TM permet de dériver les champs de vecteurs mais s'étend en une dérivée covariante sur tous les champs de tenseurs $\mathbf{t}$, *i.e.*

$$\nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{t} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{t}, \quad \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{t}) = (df.\mathbf{X})\mathbf{t} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{t},$$

grâce à la règle de Leibniz.

- Pour les champs de covecteurs :

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\alpha)(\mathbf{Y}) = d\alpha(\mathbf{Y}).\mathbf{X} - \alpha(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}).$$

- Pour les champs de tenseurs covariants d'ordre 2 :

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\varepsilon)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = d\varepsilon(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}).\mathbf{X} - \varepsilon(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \varepsilon(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}).$$

- Pour les champs de tenseurs mixtes d'ordre 2 :

$$(\nabla_{\mathbf{X}}L)(\mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}(L(\mathbf{Y})) - L(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}).$$

DÉRIVÉE COVARIANTE EN COMPOSANTES

- Pour un champ de vecteurs, $\mathbf{X}$:

$$X^i_{;j} := (\nabla_{\partial_{x^j}} X)^i = \partial_j X^i + \Gamma^i_{jk} X^k.$$

- Pour un champ de covecteurs, α :

$$\alpha_{i;j} := (\nabla_{\partial_{x^j}} \alpha)_i = \partial_j \alpha_i - \Gamma^k_{ji} \alpha_k.$$

- Pour un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, ε :

$$\varepsilon_{ij;k} := (\nabla_{\partial_{x^k}} \varepsilon)_{ij} = \partial_k \varepsilon_{ij} - \Gamma^l_{ki} \varepsilon_{lj} - \Gamma^l_{kj} \varepsilon_{il}.$$

- Pour un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2, σ :

$$\sigma^{ij}_{;k} := (\nabla_{\partial_{x^k}} \sigma)^{ij} = \partial_k \sigma^{ij} + \Gamma^i_{kl} \sigma^{lj} + \Gamma^j_{kl} \sigma^{il}.$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques**
- 3 Divergence
- 4 Pullback d'une dérivée covariante
- 5 Le problème des géodésiques

DÉRIVÉES COVARIANTES CANONIQUES

- Sur toute variété différentielle M il existe une infinité de dérivées covariantes mais aucune d'entre elle ne joue un rôle particulier.
- L'ensemble des dérivées covariantes forme un **espace affine** dont le directeur vectoriel est l'espace des champs de tenseurs :

$$\Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM).$$

- Il existe cependant deux situations où il existe une dérivée covariante **plus intéressante que les autres** et dite pour cette raison **canonique** :
 - 1 Le cas où M est **parallélisable**, *i.e.* que son fibré tangent est trivialisable

$$TM \simeq M \times \mathbb{R}^n,$$

c'est le cas d'un groupe de Lie G .

- 2 Le cas où M est une **variété riemannienne**, *i.e.* que M est munie d'une métrique riemannienne g .

A CHAQUE TRIVIALISATION, UNE DÉRIVÉE COVARIANTE

- Supposons que TM soit **trivialisable**, ce qui signifie qu'il existe un isomorphisme

$$\Psi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n, \quad \xi_m \mapsto (m, \mathbf{v}),$$

- On obtient alors une dérivée covariante sur TM en posant

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})(m) := \Psi^{-1}(m, d_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{X}(m)),$$

où la **fonction vectorielle** $\mathbf{v}(m)$ est définie par

$$\Psi(\mathbf{Y}(m)) = (m, \mathbf{v}(m)).$$

- Cette dérivée covariante dépend du choix de la trivialisation.

Exemple

Dérivée covariante canonique sur $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} := d\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}.$$

DÉRIVÉE COVARIANTE RIEMANNIENNE

- Sur une variété riemannienne (M, g) , **il existe une unique dérivée covariante** ∇ telle que :

- 1 ∇ est symétrique : $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$,
- 2 ∇ préserve la métrique : $\nabla g = 0$, ce qui se réécrit

$$dg(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).\mathbf{Z} = g(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}.$$

- On l'appelle la **dérivée covariante riemannienne** ou **dérivée covariante de Levi-Civita**.
- Dans tout système de coordonnées (x^i) , on a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad g^{-1} = (g^{ij}).$$

Exemple

Dérivée covariante sur une surface de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} := (d\mathbf{Y}.\mathbf{X})^\perp.$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques
- 3 Divergence**
- 4 Pullback d'une dérivée covariante
- 5 Le problème des géodésiques

DIVERGENCE

Il existe **deux notions de divergence** sur une variété M .

- 1 La première nécessite l'existence d'une **forme volume** μ :

$$\operatorname{div}^{\mu} \mathbf{X} := \frac{\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mu}{\mu}.$$

- 2 La deuxième nécessite l'existence d'une **dérivée covariante** ∇ :

$$\operatorname{div}^{\nabla} \mathbf{X} := \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{X}).$$

Remarque

Dans le cas riemannien, on la notera div^g .

LIEN ENTRE LES DEUX NOTIONS DE DIVERGENCE

- Si la forme volume μ est **parallèle**, c'est à dire si $\nabla\mu = 0$ (en particulier si $\mu = \text{vol}_g$, dans le cas riemannien), alors

$$\text{div}^\mu \mathbf{X} = \text{div}^\nabla \mathbf{X}$$

- La deuxième définition s'étend aux champs de tenseurs contravariants (et donc à tous les champs de tenseurs dans le cas riemannien) :

$$\text{div}^\nabla \sigma := \text{tr}_{13}(\nabla \sigma) = (\sigma^{ij}_{;i}).$$

Remarque

Une autre convention est utilisée en mécanique (sans incidence sur les tenseurs symétriques)

$$\text{div}^\nabla \sigma := \text{tr}_{23}(\nabla \sigma) = (\sigma^{ij}_{;j}).$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques
- 3 Divergence
- 4 Pullback d'une dérivée covariante**
- 5 Le problème des géodésiques

PULLBACK D'UNE DÉRIVÉE COVARIANTE PAR UN DIFFÉO

- Bien que n'étant pas un champ de tenseurs, il est possible de définir le **pullback d'une dérivée covariante par un difféomorphisme**.
- Pour être **naturelle**, cette définition doit vérifier :

$$\varphi^* (\nabla_X Y) = (\varphi^* \nabla)_{\varphi^* X} (\varphi^* Y) ,$$

ce qui nous conduit à la définition suivante :

$$\boxed{(\varphi^* \nabla)_X Y := \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y)}$$

- On peut vérifier que cette expression satisfait bien les axiomes d'une dérivée covariante.

PULLBACK QUAND φ N'EST PAS UN DIFFÉOMORPHISME

- Il est possible d'étendre cette définition quand φ n'est pas un **difféomorphisme** mais seulement une application différentiable

$$\varphi: N \rightarrow M.$$

- Pour cela, il faut commencer par définir le **fibré pullback**, de base N (et non M)

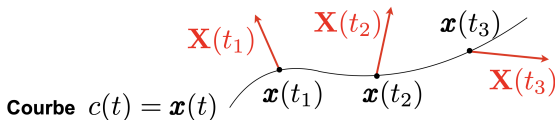
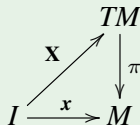
$$\varphi^*TM := \coprod_{n \in N} T_{\varphi(n)}M$$

- Les sections de ce fibré pullback sont appelées les **champs de vecteurs défini le long de φ** .
- On peut montrer qu'une dérivée covariante sur TM induit alors une dérivée covariante sur φ^*TM .

EXEMPLE : CHAMP DE VECTEURS DÉFINI LE LONG D'UNE COURBE

Définition

Un **champ de vecteurs défini le long d'une courbe** $\mathbf{x}(t) \in M$ est une courbe $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in TM$ telle que $\mathbf{X}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}M$.



Exemple

Le vecteur vitesse $t \mapsto \dot{\mathbf{x}}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}M$ n'est défini que le long de la courbe $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in M$.

APPLICATION : DÉFINITION DE L'ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE

- Définir l'**accélération** d'une particule décrivant une courbe $\mathbf{x}(t)$ tracée sur M , c'est **être capable de dériver le vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}(t)$** .
- **Problème** : $\dot{\mathbf{x}}(t)$ n'est pas un champ de vecteurs défini sur tout M , $\dot{\mathbf{x}}(t)$ n'est défini que le long de la courbe $\mathbf{x}(t)$!
- Heureusement, la dérivée covariante pullback $\mathbf{x}^*\nabla$ permet de dériver un champ de vecteurs $\mathbf{X}(t)$ défini uniquement le long de $\mathbf{x}(t)$. En composantes, celle-ci s'écrit :

$$\left(\frac{D\mathbf{X}}{Dt}\right)^k = \frac{d}{dt}X^k(t) + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i(t)X^j(t).$$

Remarque

Si $\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t))$, est la restriction à la courbe $\mathbf{x}(t)$ d'un champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{X}}$, alors

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \left(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}(t)}\tilde{\mathbf{X}}\right)(\mathbf{x}(t)).$$

LIGNES DIRECTRICES

- 1 Notion de dérivée covariante
- 2 Dérivées covariantes canoniques
- 3 Divergence
- 4 Pullback d'une dérivée covariante
- 5 Le problème des géodésiques

GÉODÉSQUES

- Sur une variété riemannienne (M, g) , ou plus généralement sur une variété M munie d'une dérivée covariante ∇ , une **géodésique** est une courbe $\mathbf{x}(t)$ d'**accélération nulle**, *i.e.*

$$\frac{D\dot{\mathbf{x}}}{Dt} = 0$$

- En composantes, les équations des géodésiques s'écrivent

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

- Dans le cas des variétés riemanniennes, les géodésiques sont les extrémales de l'« énergie cinétique »

$$K := \frac{1}{2} \int g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt.$$

PREMIÈRE VARIATION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

- On introduit une famille à un paramètre $\sigma(s, t) = \sigma_s(t)$ de chemins joignant deux points a et b sur M , avec

$$\sigma(s, 0) = a, \quad \sigma(s, 1) = b, \quad \sigma(0, t) = \alpha(t), \quad \partial_s \sigma(0, t) = \delta \alpha(t).$$

- On a

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_0^1 \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \langle \partial_t \sigma, \partial_t \sigma \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \dot{\alpha}, \frac{D(\delta \alpha)}{Dt} \right\rangle dt,$$

car

$$\partial_s \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{D}{Ds} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\rangle \quad \text{et} \quad \frac{D}{Dt} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{D}{Ds} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

- Mais

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\alpha}, \delta \alpha \rangle = \left\langle \frac{D \dot{\alpha}}{Dt}, \delta \alpha \right\rangle + \left\langle \dot{\alpha}, \frac{D(\delta \alpha)}{Dt} \right\rangle,$$

ce qui nous donne finalement, compte tenu que $\delta \alpha(0) = 0$ et $\delta \alpha(1) = 0$:

$$\delta K = - \int_0^1 \left\langle \frac{D \dot{\alpha}}{Dt}, \delta \alpha \right\rangle dt.$$

Les points critiques de l'énergie cinétique sont donc bien les géodésiques.

SECONDE VARIATION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

- On introduit maintenant une famille à 3 paramètres $\sigma(u, s, t)$ avec

$$\sigma(0, 0, t) = \alpha(t), \quad \partial_s \sigma(0, 0, t) = \delta_1 \alpha(t), \quad \partial_u \sigma(0, 0, t) = \delta_2 \alpha(t).$$

$$\begin{aligned} \delta^2 K &= - \int_0^1 \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0, s=0} \left\langle \frac{D}{Dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right\rangle dt, \\ &= - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{Du} \frac{D}{Dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right\rangle_{u=0, s=0} + \left\langle \frac{D\dot{\alpha}}{Dt}, \frac{D}{Du} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right\rangle_{u=0, s=0} dt, \end{aligned}$$

où le second terme de droite est nul si α est un point critique.

- Mais

$$\left(\frac{D}{Du} \frac{D}{Dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_{u=0, s=0} = \frac{D^2}{Dt^2} \delta_2 \alpha + R(\delta_2 \alpha, \dot{\alpha}) \dot{\alpha},$$

car

$$\frac{D}{Du} \frac{D}{Dt} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{D}{Dt} \frac{D}{Du} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = R \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

- Le noyau du Hessien $\delta^2 K$ est constitué par les **champs de Jacobi J** , solutions de l'équation $\frac{D^2 J}{Dt^2} + R(J, \dot{\alpha}) \dot{\alpha} = 0$ **qui s'annulent aux extrémités**.

CONCLUSION

- Contrairement aux idées reçues, **les géodésiques sont seulement les points critiques de l'énergie cinétique**, c'est-à-dire les courbes d'accélération nulle. Elles ne sont pas minimisantes en général.
- Pour obtenir les courbes qui minimisent l'énergie cinétique (ou la longueur), il faut travailler sur la **seconde variation** de l'énergie cinétique.
- On peut montrer que les géodésiques issues d'un point sont toujours **minimisantes** au voisinage de ce point. Quand on les prolonge, on doit considérer la seconde variation : **dès qu'apparaît un champ de Jacobi qui s'annule aux extrémités, la géodésique cesse en générale d'être minimisante** (l'exemple des géodésiques de la sphère est très visuel).