

Éléments de géométrie différentielle et introduction au calcul variationnel
B. Kolev

Feuille d'exercices

1 Énoncés des exercices

1.1 Variétés différentielles et fibrés vectoriels

Definition 1. Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. On dit que f est une submersion au point m si son application linéaire tangente

$$T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$$

est surjective.

Theorem 2 (Théorème de la submersion). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application lisse. Si f est une submersion en tout point de

$$S := f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\},$$

alors S est une sous-variété lisse de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$ et l'espace tangent en un point x_0 de S s'écrit

$$T_{x_0} S = \ker T_{x_0} f.$$

Remark 3. C'est la version non linéaire du résultat suivant d'algèbre linéaire. Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire *surjective*. Alors

$$\ker L := \{x \in \mathbb{R}^n; Lx = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$, par la formule de la dimension

$$\dim \ker L + \dim L(E) = \dim E, \quad (E : \text{espace de départ})$$

Exercice 1 Structure de variété différentielle sur la sphère

On définit la sphère de dimension n

$$\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\mathbf{x}\|^2 = x^{1^2} + \dots + x^{n+1^2} = 1\}.$$

Le pôle Nord est le point $N = (0, \dots, 0, 1)$ et le pôle Sud, le point $S = (0, \dots, 0, -1)$. On note

$$H := \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x^{n+1} = 0\}$$

le plan équatorial. On pose $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et on introduit les projections stéréographiques $\psi_N : U_N \rightarrow H$ et $\psi_S : U_S \rightarrow H$.

1. Calculer ψ_N et ψ_S .
2. Calculer les changements de cartes correspondant $\psi_{NS} = \psi_S \circ \psi_N^{-1}$, $\psi_{SN} = \psi_N \circ \psi_S^{-1}$ et préciser leur domaine de définition respectifs.

3. En déduire que les deux cartes (U_N, ψ_N) et (U_S, ψ_S) forment un atlas de $\mathbb{S}^n$ qui est ainsi munie d'une structure de variété différentielle.
4. Montrer directement que $\mathbb{S}^n$ est aussi une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 2 Espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites (vectorielles) de $\mathbb{R}^{n+1}$. Chaque droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ étant engendrée par un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ et deux vecteurs non nuls colinéaires engendrant la même droite, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ correspond donc à l'espace quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété différentielle lisse de dimension n . Pour $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est diffeomorphe à un cercle. Pour $n = 2$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une variété différentielle de dimension 2 non-orientable (donc unilatère) dont une immersion dans $\mathbb{R}^3$ (avec des auto-intersections) correspond à la surface de Boy

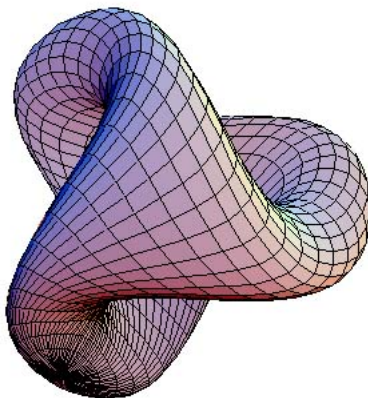


FIGURE 1 – Surface de Boy

Pour $1 \leq i \leq n + 1$, on introduit

$$U_i := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}); x^i \neq 0\},$$

et $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec

$$\psi_i([\mathbf{x}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

1. Montrer que (U_i, ψ_i) est une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et calculer son inverse.
2. Calculer les changements de cartes $\psi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}: \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$ correspondant.
3. Montrer que $\mathcal{A} = (U_i, \psi_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est un atlas qui munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ .

Exercice 3 Les variétés de Stiefel et Grassmann

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit l'ensemble

$$V_k(\mathbb{R}^n) := \{X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n); \text{rang}(X) = k\}.$$

$V_k(\mathbb{R}^n)$ est donc l'ensemble des matrices rectangulaires

$$\begin{pmatrix} X^1_1 & \cdots & X^1_k \\ X^2_1 & \cdots & X^2_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X^n_1 & \cdots & X^n_k \end{pmatrix}$$

qui peuvent s'interpréter comme un système de k vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit un k -repère dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $V_k(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ et donc une variété de dimension kn qu'on appelle la *variété de Stiefel*.

On introduit aussi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, noté $G_k(\mathbb{R}^n)$, et appelé la *Grassmannienne* des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que $G_k(\mathbb{R}^n)$ est une variété différentielle de dimension $k(n-k)$ et de produire un atlas de cette variété.

Remarque : pour $k = 1$, on a bien sûr $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, les Grassmanniennes sont donc des généralisations des espaces projectifs.

1. Par définition, un point X de $V_k(\mathbb{R}^n)$ engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension k . Montrer que deux éléments X et Y de $V_k(\mathbb{R}^n)$ engendrent le même sous-espace si et seulement si, il existe un élément A du groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ tel que $Y = XA$.

La variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ correspond donc à l'espace quotient (ou espace des orbites)

$$G_k(\mathbb{R}^n) \simeq V_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),$$

où un point $[X]$ de l'espace quotient $V_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ correspond à l'ensemble de tous les k -repères X de $V_k(\mathbb{R}^n)$ qui engendrent un même sous-espace vectoriel E de $G_k(\mathbb{R}^n)$. Pour toute partie I de cardinal k de $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$, on note $J := \mathbb{N}_n \setminus I$ sa partie complémentaire.

2. Étant donné $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, on désigne par X_I le mineur de taille $k \times k$ extrait de X par les lignes indexées par I . Montrer que

$$(XA)_I = X_I A, \quad (XA)_J = X_J A, \quad \forall A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),$$

3. Dédurre de la question précédente que

$$\det(XA)_I = \det X_I \det A, \quad \forall A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),$$

et que

$$(XA)_J (XA)_I^{-1} = X_J (X_I)^{-1}.$$

On déduit alors que l'ensemble

$$U_I := \{[X] \in G_k(\mathbb{R}^n); \det X_I \neq 0\}$$

et l'application

$$\psi_I[X] := X_J X_I^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}),$$

définie sur U_I sont bien définis sur $G_k(\mathbb{R}^n)$, car ils ne dépendent pas du représentant $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$ choisi.

4. Montrer que les cartes locales (U_I, ψ_I) forment un atlas de classe C^∞ de $G_k(\mathbb{R}^n)$. Expliciter les changements de cartes.

Exercice 4 Le groupe orthogonal comme sous-variété

Soit $O(3)$ le groupe des matrices orthogonales (c'est à dire des transformations linéaires de $\mathbb{R}^3$ qui préservent le produit scalaire),

$$O(3) = \{P \in M_3(\mathbb{R}); P^t P = I\}$$

1. En utilisant l'application

$$f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow S^2(\mathbb{R}^3), \quad P \mapsto P^t P - I$$

et le théorème de la submersion, montrer que $O(3)$ est une sous-variété de $M_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

2. Calculer l'espace tangent au point I .

Exercice 5 La variété TM est orientable

Soit M une variété de dimension n et (x^i) un système de coordonnées (une carte locale) sur M . Un vecteur tangent ξ_m de l'espace tangent $T_m M$ au point m a alors pour expression

$$\xi_m = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Un second système de coordonnées (y^j) sur M induit une seconde expression du vecteur tangent ξ_m en m ,

$$\xi_m = \mu^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Une fois donné un atlas de M , on en déduit alors un atlas particulier de TM (constitué des cartes (x^i, λ^i) , (y^j, μ^j) , (z^k, ν^k) , $\dots$, où les cartes (x^i) , (y^j) , (z^k) , $\dots$, forment un atlas de M).

1. Considérons deux cartes locales $X = (x^i, \lambda^i)$ et $Y = (y^j, \mu^j)$ de TM . On note $y^j = \phi^j(x^i)$ le changement de coordonnées (de cartes) sur M . Expliciter le changement de carte sur TM .
2. Déterminer la matrice $\frac{\partial Y}{\partial X}$ de l'application linéaire tangente au changement de coordonnées sur TM

$$\delta X = (\delta x^i, \delta \lambda^i) \mapsto \delta Y = (\delta y^j, \delta \mu^j),$$

et en déduire que son jacobien est positif. En conclure que la variété TM est orientable.

Problème des extrema liés par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Considérons le problème de la recherche des minima d'une fonction $\mathcal{F}$ sous la contrainte f , *i.e.*

$$\min_{f(x)=0} \mathcal{F}(x).$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange formule des conditions nécessaires pour qu'un point x soit solution du problème, sous la condition que la contrainte f soit une submersion (*i.e.* que $\text{grad } f \neq 0$). Cette condition semble avoir été oubliée par de nombreux utilisateurs de cette méthode. Dans l'exercice qui suit, on illustre le fait que, sans cette condition, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne mène nulle part.

En effet, considérons le calcul de la distance Δ d'une matrice 3×3 déviatorique d'ordre deux $\mathbf{h}_0$ (ayant, en général, 3 valeurs propres distinctes) à l'ensemble des matrices isotropes transverses (*i.e.* ayant 2 valeurs propres égales). Ce problème se formule comme la minimisation sous contrainte

$$\Delta^2 = \min_{f(\mathbf{h})=0} \mathcal{F}(\mathbf{h}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h} - \mathbf{h}_0\|^2.$$

où

$$f(\mathbf{h}) = (\text{tr } \mathbf{h}^2)^3 - 6 (\text{tr } \mathbf{h}^3)^2.$$

Comme nous le montrerons, $\text{grad}_{\mathbf{h}} f = 0$ pour tout $\mathbf{h}$ satisfaisant $f(\mathbf{h}) = 0$. Dans ce cas, le problème des multiplicateurs de Lagrange conduit à

$$\text{grad}_{\mathbf{h}} \mathcal{F} + \lambda \text{grad}_{\mathbf{h}} f = \text{grad}_{\mathbf{h}} \mathcal{F} = 2(\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) = 0,$$

ce qui mène à une contradiction.

Exercice 6 Le cas des tenseurs d'ordre 2 isotropes transverses

On note $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$ le sous-espace de $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ des matrices de trace nulle (*i.e.* déviatoriques). On s'intéresse au sous-ensemble S des matrices $\mathbf{h}$

déviatoriques isotropes transverses, *i.e.* ayant deux valeurs propres égales. On rappelle qu'une forme normale de ces matrices est

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\text{tr } \mathbf{h}^3}{\text{tr } \mathbf{h}^2} \neq 0. \quad (3)$$

1. Montrer que si $\mathbf{h}$ est isotrope transverse alors

$$f(\mathbf{h}) := (\text{tr } \mathbf{h}^2)^3 - 6 (\text{tr } \mathbf{h}^3)^2 = 0 \quad \text{avec } \mathbf{h} \neq 0.$$

(on admet la réciproque).

2. Calculer le gradient

$$\text{grad}_{\mathbf{h}} f$$

et montrer que $\text{grad}_{\mathbf{h}} f = 0$ pour tout $\mathbf{h}$ isotrope transverse.

3. Peut-on en déduire, à l'aide du théorème de la submersion, que

$$S = \{ \mathbf{h} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3), f(\mathbf{h}) = 0 \},$$

est une sous-variété de $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$?

1.2 Champs de vecteurs sur une variété

Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Ce champ définit une équation différentielle ordinaire

$$\dot{c}(t) = X(c(t)).$$

Theorem 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$). Alors, pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de $\mathbf{x}_0$ et $\varepsilon > 0$ tel que le problème initial*

$$\dot{c}(t) = X(c(t)), \quad c(0) = \mathbf{x}$$

avec $\mathbf{x} \in U$ admet une solution $c(t)$ définie sur l'intervalle $] -\varepsilon, \varepsilon[$, de classe C^{k+1} . De plus cette solution est unique et dépend de manière C^k de la condition initiale.

On notera cette solution $c(t)$ de manière plus précise par $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi^t(\mathbf{x})$, où t est le temps et $\mathbf{x}$ est la condition initiale. Cette application φ est définie sur un voisinage de $t = 0$ et de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Elle vérifie bien évidemment $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. On l'appelle le *flot* du champ de vecteurs X . Pour chaque t , φ^t est un difféomorphisme local (unicité de la solution et dépendance C^k à la condition initiale).

Exercice 7 Flot d'un champ de vecteurs

1. Soit X le champ radial sur $\mathbb{R}^n$ défini par $X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?
2. Soit X le champ radial avec origine $\mathbf{x}_0$ sur $\mathbb{R}^n$ défini par $X(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?
3. On se place dans $\mathbb{R}$ et on introduit le champ de vecteur $X(x) = x^2$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?

Exercice 8 Propriété de sous-groupe à un paramètre

Soit X un champ de vecteurs et φ^t son flot. Montrer que si φ^t , φ^s et φ^{t+s} sont définis, alors

$$\varphi^{t+s}(\mathbf{x}) = \varphi^t(\varphi^s(\mathbf{x})) = \varphi^s(\varphi^t(\mathbf{x})).$$

Exercice 9 Champ de vecteurs dépendant du temps

Un « champ de vecteur dépendant du temps » sur une variété M est un champ de vecteur $\mathbf{u}(t)$ dépendant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$ de sorte que :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le problème de Cauchy associé s'écrit :

$$\dot{c}(t) = \mathbf{u}(t, c(t)), \quad c(s) = x. \quad (4)$$

La solution de ce problème, fournie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, définit un flot, noté φ_s^t défini par

$$\partial_t \varphi_s^t(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \varphi_s^t(\mathbf{x})), \quad \varphi_s^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Introduisons la variété $\widetilde{M} := \mathbb{R} \times M$. Alors l'espace tangent en un point $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$ s'écrit

$$T_{(t,m)}(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \oplus T_x M.$$

On définit alors le champ de vecteur $\widetilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \partial_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ sur $\widetilde{M}$, dont le flot s'écrit

$$\tilde{\varphi}^\tau(t, \mathbf{x}) = (\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}), \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x})) \in \mathbb{R} \times M.$$

1. Montrer que $\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}) = \tau + t$.
2. Montrer que $\varphi_s^t(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x})$.
3. De la propriété de sous-groupe à un paramètre vérifiée par $\tilde{\varphi}$, en déduire que

$$\varphi_s^t = \varphi_r^t \circ \varphi_s^r, \quad \forall r, s, t.$$

Exercice 10 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Étant donné un champ de vecteur X sur une variété M , on définit l'opérateur

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto \mathcal{L}_X f := \mathrm{d}f.X = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

1. Montrer que cet opérateur est une dérivation sur l'algèbre de fonctions $C^\infty(M)$, c'est à dire un opérateur linéaire $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, qui vérifie de plus

$$\mathcal{L}_X(fg) = f(\mathcal{L}_X g) + (\mathcal{L}_X f)g, \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \quad (\text{règle de Leibniz}).$$

2. Soit X et Y deux champs de vecteurs. Montrer que $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ est aussi une dérivation.
3. On considère un système de coordonnées locales (x^i) . Montrer que

$$(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)f = W^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

et donner l'expression de W^i .

Remarque : $W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est l'expression locale d'un champ de vecteur W , qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle le *crochet de Lie* des champs X et Y . On a alors

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} f = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)f = [X, Y]^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

4. Que vaut $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]$?
5. Que vaut $[X, \frac{\partial}{\partial x^i}]$?
6. Montrer que, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z , sur M , on a
 - (a) $[Y, X] = -[X, Y]$ (antisymétrie du crochet de Lie),
 - (b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi).

1.3 Pullback et dérivée de Lie

Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés différentielles M et N . On introduit le *pullback* (et son inverse, le *push-forward*) qui transforme les champs de tenseurs sur N en champs de tenseurs sur M . Il y a une seule façon d'écrire un pullback et celle-ci se visualise bien à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Par exemple :

- Le pullback d'un champ de tenseurs d'ordre 0, c'est à dire d'une fonction $f \in C^\infty(N)$ s'écrit

$$\varphi^* f := f \circ \varphi.$$

- Le pullback d'une 1-forme α (un champ de covecteurs) sur N est défini par

$$(\varphi^* \alpha)_m(X_m) := \alpha_{\varphi(m)}(T_m \varphi \cdot X_m), \quad X_m \in T_m M,$$

que l'on réécrit de manière plus concise

$$(\varphi^* \alpha)(X) := (\alpha \circ \varphi)(T\varphi \cdot X) = ((\alpha \circ \varphi), T\varphi \cdot X) = ((T\varphi)^* \cdot (\alpha \circ \varphi), X), \quad X \in TM,$$

ou encore

$$\varphi^* \alpha := \alpha \circ \varphi \cdot T\varphi = (T\varphi)^* \cdot \alpha \circ \varphi.$$

- Le pullback d'un champ de vecteurs ou plus généralement d'un champ de tenseurs contra-variants ou mixtes nécessite que φ soit inversible. On a par exemple, X étant un champ de vecteurs sur N ,

$$(\varphi^* X)(m) := T_{\varphi(m)} \varphi^{-1} \cdot X(\varphi(m)),$$

que l'on réécrit

$$\varphi^* X := T\varphi^{-1} \cdot X \circ \varphi.$$

Exercice 11

1. Expliciter le pullback $\varphi^* \mathbf{k}$ d'un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, $\mathbf{k}$, à l'aide de $\mathbf{F} = T\varphi$ et $\mathbf{F}^* = (T\varphi)^*$ visualisés sur les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{(T\varphi)^*} & T^*N \\ \downarrow \pi_{T^*M} & & \downarrow \pi_{T^*N} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

2. Si $\mathbf{q}$ désigne la métrique euclidienne sur $M = N = \mathbb{R}^3$, comment s'écrit $\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q}$ dans un système de coordonnées orthonormées ? On pourra introduire $\mathbf{F}^t$ et $\mathbf{F}^*$ définis à l'aide du diagramme suivant, avec ici $\mathbf{q}_M = \mathbf{q}_N = \mathbf{q}$,

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{\mathbf{F}^*} & T^*N \\ \mathbf{q}_M \uparrow & & \uparrow \mathbf{q}_N \\ TM & \xrightarrow{\mathbf{F}} & TN \\ & \xleftarrow{\mathbf{F}^t} & \end{array} \quad \mathbf{q}_M \mathbf{F}^t = \mathbf{F}^* \mathbf{q}_N,$$

de sorte que $\mathbf{F}^t = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{q}$, soit en composantes $(\mathbf{F}^t)^I{}_j = q^{IK} (\mathbf{F}^*)_K{}^l q_{lj}$.

3. Expliciter le pullback $\varphi^*\sigma$ d'un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2, σ , dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de $\mathbf{F} = T\varphi$.

Le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ d'une variété différentielle M agit linéairement sur tout espace $\mathbb{T}(M)$, de champs de tenseurs sur M . Plus précisément, l'application

$$\rho : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{T}(M)), \quad \varphi \mapsto \rho(\varphi) = \varphi_*$$

satisfait

$$\rho(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \rho(\varphi_1)\rho(\varphi_2).$$

Pour des raisons historiques, c'est en général l'action (à droite) $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ qui est plutôt considérée. La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs $\mathbf{T} \in \mathbb{T}(M)$ correspond à l'action infinitésimale de cette action. Plus précisément. Soit $\varphi(t)$ un chemin de difféomorphismes avec $\varphi(0) = id$ et $\dot{\varphi}(0) = X$, alors

$$\mathcal{L}_X \mathbf{T} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t)^* \mathbf{T},$$

où $\mathbf{T}$ est un champ de tenseur quelconque défini sur M .

Remark 5. On peut appliquer, en particulier, la formule précédente sur le flot $\varphi(t)$ de X , c'est à dire le chemin de difféomorphismes $\varphi(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\partial_t \varphi(t, m) = X(\varphi(t, m)), \quad \varphi(0, m) = m.$$

Exercice 12

1. Que vaut $\mathcal{L}_X f$ quand f est une fonction ?
2. En déduire l'expression locale de $\mathcal{L}_X f$.

Exercice 13 Règle de Leibniz

1. Montrer que si α est une 1-forme sur N , Y , un champ de vecteur sur N et φ , un difféomorphisme de M dans N , on a :

$$\varphi^*(\alpha(Y)) = (\varphi^*\alpha)(\varphi^*Y).$$

2. En déduire que :

$$\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y),$$

i.e., la règle de Leibniz est une conséquence du fait que le pull-back commute avec la contraction.

Exercice 14 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Soit f une fonction. On rappelle que si φ une application différentiable, alors

$$d(\varphi^*f) = \varphi^*(df).$$

1. Soit Y un champ de vecteurs et φ un difféomorphisme. Montrer que

$$\varphi^*(\mathcal{L}_Y f) = \mathcal{L}_{\varphi^*Y}(\varphi^*f).$$

2. En déduire que

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f.$$

3. Conclure que

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y,$$

où $[X, Y]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y , implicitement défini par

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) f.$$

Exercice 15 Champs de vecteurs qui commutent

Soit X et Y deux champs de vecteurs définis sur une variété différentielle M . On désigne leur flots respectifs par φ^t et ψ^s .

1. Montrer que les flots commutent, c'est-à-dire que $\psi^s \circ \varphi^t = \varphi^t \circ \psi^s$ si et seulement si $[X, Y] = 0$.

Exercice 16 Dérivée de Lie de la métrique euclidienne

1. Soit X un champ de vecteurs défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{q}$ la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que les composantes de $\mathcal{L}_X \mathbf{q}$ dans un système de coordonnées locales (x^i) de Ω s'écrivent

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = X^k \partial_k q_{ij} + q_{kj} \partial_i X^k + q_{il} \partial_j X^l.$$

Cette formule reste valable si $X = \mathbf{u}(t)$ est un champ de vecteurs dépendant du temps.

2. Que valent ces composantes dans un système de coordonnées linéaires (x^i) définies à partir d'une base $(\mathbf{e}_i)$ de $\mathbb{R}^3$,
 - (a) non nécessairement orthonormée,
 - (b) orthonormée.
3. Donner l'interprétation mécanique du résultat précédent lorsque Ω est la configuration déformée de la Mécanique des Milieux Continus (plongée dans $\mathbb{R}^3$), et $X = \mathbf{u}$ est le champ des vitesses euleriennes.

Exercice 17 Formule magique

La dérivée de Lie peut être étendue aux champs de vecteurs dépendant du temps en posant

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{T} := \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} (\varphi_t^\tau)^* \mathbf{T}.$$

Étant donné un chemin de plongement $p(t): \mathcal{B} \rightarrow M$, on définit sa vitesse eulerienne comme le champ de vecteur dépendant du temps et défini sur M par

$$\mathbf{u}(t) := \partial_t p \circ p(t)^{-1}$$

1. Soit φ_s^t le flot de $\mathbf{u}(t)$. Montrer que $p(t) = \varphi_s^t \circ p(s)$.
2. Soit $\mathbf{T}(t)$ un champ de tenseur dépendant du temps et défini sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathcal{B})$. En déduire que

$$\partial_t (p(t)^* \mathbf{T}(t)) = p(t)^* (\partial_t \mathbf{T} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{T}(t)).$$

3. Relier le tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C} = \varphi^* \mathbf{q}$ (défini sur la configuration de référence $\Omega_0 = \varphi^{-1}(\Omega)$ de la Mécanique des Milieux Continus) au taux de déformation $\mathbf{d}$ de la Mécanique des Milieux Continus (défini sur la configuration déformée $\Omega = \varphi(\Omega_0)$).

1.4 Différentielle extérieure – Théorème de Stokes

- Le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs X, Y est défini par

$$[X, Y] := \mathcal{L}_X Y,$$

et a pour composantes dans tout système de coordonnées locales (x^i) :

$$[X, Y]^j = X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j. \quad (6)$$

- La *dérivée extérieure* est une application linéaire

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

qui étend la différentielle d'une fonction (une 0-forme) à une forme différentielle de degré k quelconque. Elle est définie récursivement (sur le degré) par la *formule de Cartan*

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Sa propriété principale est le fait que

$$d \circ d = 0.$$

Exercice 18 Dérivée extérieure d'une forme de degré 1 ou 2

1. En utilisant la formule de Cartan, montrer que la différentielle extérieure d'une 1-forme α s'écrit :

$$(d\alpha)(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

et en déduire son expression en composantes $(d\alpha)_{ij}$.

2. En utilisant la formule de Cartan, montrer que la différentielle extérieure d'une 2-forme ω s'écrit :

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) = & \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) + \omega(X, [Y, Z]) + \mathcal{L}_Y(\omega(Z, X)) + \omega(Y, [Z, X]) \\ & + \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) + \omega(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

et en déduire son expression en composantes $(d\omega)_{ijk}$.

On observe à nouveau que l'expression de la dérivée de Lie d'une forme se réduit à la connaissance de la dérivée de Lie d'une fonction et de celle d'un champ de vecteurs (i.e., du crochet de Lie).

Exercice 19 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme volume sur une variété M de dimension n . On définit la divergence $\text{div}^\omega X$ d'un champ de vecteurs X sur M par

$$\mathcal{L}_X \omega = (\text{div}^\omega X) \omega.$$

1. Pourquoi $\mathcal{L}_X \omega$ est proportionnelle à ω ?
2. Montrer que si $M = \mathbb{R}^3$ et ω est le déterminant $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\text{div}^\omega X$ correspond à la "divergence ordinaire"

$$\text{div} X = \partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3,$$

d'un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20 Conservation de la masse

On rappelle que le body $\mathcal{B}$ est muni d'une forme volume μ , la mesure de masse. A chaque plongement p correspond donc une forme volume $p_*\mu$ sur la configuration $\Omega_p = p(\mathcal{B})$ qui est donc proportionnelle à la forme volume $\text{vol}_{\mathbf{q}} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (dans tout système de coordonnées orthonormales direct (x^1, x^2, x^3) définie sur l'espace). Ceci permet de définir la **densité de masse** ρ comme une fonction scalaire sur le domaine spatial Ω_p par

$$p_*\mu = \rho \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

1. On considère une configuration de référence $p_0 : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_0$ et une configuration actuelle $p : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_p$. On introduit la transformation $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_p$, définie par $\varphi := p \circ p_0^{-1}$. Montrer que

$$\rho_0 = (\varphi^*\rho)J_\varphi = (\rho \circ \varphi)J_\varphi.$$

(Rappel : le Jacobien J_φ est défini implicitement par l'équation $\varphi^*\text{vol}_{\mathbf{q}} = J_\varphi \text{vol}_{\mathbf{q}}$, où $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$, $(p \circ p_0^{-1})^* = (p_0^{-1})^*p^*$ et $(p_0^{-1})^* = (p_0^*)^{-1} = p_{0*}$).

2. En déduire la **version dynamique de la conservation de la masse**

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = \dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \dot{\rho} := \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho,$$

si $\varphi(t)$ est un chemin de plongements. On pourra faire appel à la « formule magique » :

$$\partial_t \varphi^* \omega = \varphi^*(\partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega).$$

Exercice 21 Lois de conservations intégrales

Soit $\Omega = p(\mathcal{B})$ la configuration actuelle (plongée par p dans l'espace euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$) et

$$\mathbf{V} := \partial_t p, \quad \mathbf{u} = \mathbf{V} \circ p^{-1}$$

les vitesses lagrangienne et eulerienne.

1. Etablir, à l'aide de la formule magique, la relation suivante,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} \partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega,$$

valable pour toute 3-forme alternée ω définie sur Ω .

2. Soit f une fonction. Montrer, en utilisant la question 1, que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} (\dot{f} + f \text{div} \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}} \quad \text{où} \quad \dot{f} := \partial_t f + \nabla_{\mathbf{u}} f.$$

où pour une fonction $\nabla_{\mathbf{u}} f := \text{d}f \cdot \mathbf{u}$.

3. Soit f une fonction et ρ la masse volumique. Montrer, à l'aide de la conservation de la masse, que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho f \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} \rho \dot{f} \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$