

Éléments de géométrie différentielle et introduction au calcul variationnel
B. Kolev

Feuille d'exercices

1 Énoncés des exercices

1.1 Variétés différentielles et fibrés vectoriels

Definition 1. Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentiable. On dit que f est une submersion au point m si son application linéaire tangente

$$T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$$

est surjective.

Theorem 2 (Théorème de la submersion). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application lisse. Si f est une submersion en tout point de

$$S := f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\},$$

alors S est une sous-variété lisse de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$ et l'espace tangent en un point x_0 de S s'écrit

$$T_{x_0} S = \ker T_{x_0} f.$$

Remark 3. C'est la version non linéaire du résultat suivant d'algèbre linéaire. Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire *surjective*. Alors

$$\ker L := \{x \in \mathbb{R}^n; Lx = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$, par la formule de la dimension

$$\dim \ker L + \dim L(E) = \dim E, \quad (E : \text{espace de départ})$$

Exercice 1 Structure de variété différentielle sur la sphère

On définit la sphère de dimension n

$$\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|\mathbf{x}\|^2 = x^{1^2} + \dots + x^{n+1^2} = 1\}.$$

Le pôle Nord est le point $N = (0, \dots, 0, 1)$ et le pôle Sud, le point $S = (0, \dots, 0, -1)$. On note

$$H := \{\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x^{n+1} = 0\}$$

le plan équatorial. On pose $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et on introduit les projections stéréographiques $\psi_N : U_N \rightarrow H$ et $\psi_S : U_S \rightarrow H$.

1. Calculer ψ_N et ψ_S .
2. Calculer les changements de cartes correspondant $\psi_{NS} = \psi_S \circ \psi_N^{-1}$, $\psi_{SN} = \psi_N \circ \psi_S^{-1}$ et préciser leur domaine de définition respectifs.

3. En déduire que les deux cartes (U_N, ψ_N) et (U_S, ψ_S) forment un atlas de $\mathbb{S}^n$ qui est ainsi munie d'une structure de variété différentielle.
4. Montrer directement que $\mathbb{S}^n$ est aussi une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Solution de l'exercice 1

1. La projection stéréographique de pôle Nord est définie comme suit : on considère une droite issue du pôle Nord (et non tangente à la sphère). Elle coupe la sphère en un point $M = (x^1, \dots, x^{n+1})$, et le plan équatorial en un point $m = (u^1, \dots, u^n, 0)$ qui est la projection stéréographique du point M . Le théorème de Thalès nous donne alors

$$\psi_N : \quad u^i = \frac{x^i}{1 - x^{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

De même, pour la projection stéréographique de pôle Sud, on obtient :

$$\psi_S : \quad v^i = \frac{x^i}{1 + x^{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

2. Premièrement, il nous faut inverser ψ_N et ψ_S . Commençons par ψ_N . On se donne $m = (u^1, \dots, u^n, 0)$ dans le plan équatorial et on cherche $M = (x^1, \dots, x^{n+1})$ sur la sphère satisfaisant (1), c'est à dire

$$x^i = (1 - x^{n+1})u^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

En utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{n+1} x^{i2} = 1$, on tire d'abord

$$x^{n+1} = \frac{\sum_i u^{i2} - 1}{\sum_i u^{i2} + 1},$$

puis

$$x^i = \frac{2u^i}{\sum_i u^{i2} + 1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

De même, pour l'inverse de ψ_S , on trouve

$$x^{n+1} = \frac{1 - \sum_i v^{i2}}{1 + \sum_i v^{i2}}, \quad x^i = \frac{2v^i}{1 + \sum_i v^{i2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

On en déduit

$$\psi_{NS} : u^i \mapsto v^i = \frac{u^i}{\sum_i u^{i2}}, \quad \psi_{SN} : v^i \mapsto u^i = \frac{v^i}{\sum_i v^{i2}}.$$

Les domaines de définitions de ces deux applications, inverses l'une de l'autre, sont $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3. Comme les changements de cartes ψ_{NS} et ψ_{SN} sont C^∞ , cet atlas muni la sphère $\mathbb{S}^n$ d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ .
4. On introduit la fonction

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2 - 1,$$

de sorte que $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$. La fonction f est C^∞ et sa différentielle s'écrit

$$d_{\mathbf{x}}f \cdot \delta \mathbf{x} = 2\mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x}.$$

Cette différentielle $d_{\mathbf{x}}f$ est une application surjective si $\mathbf{x} \neq 0$. Ainsi, f est une submersion sur $f^{-1}(0)$ car $0 \notin f^{-1}(0)$. D'après le théorème de la submersion, $\mathbb{S}^n$ est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 2 Espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites (vectorielles) de $\mathbb{R}^{n+1}$. Chaque droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ étant engendrée par un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$ et deux vecteurs non nuls colinéaires engendrant la même droite, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ correspond donc à l'espace quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété différentielle lisse de dimension n . Pour $n = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est difféomorphe à un cercle. Pour $n = 2$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une variété différentielle de dimension 2 non-orientable (donc unilatère) dont une immersion dans $\mathbb{R}^3$ (avec des auto-intersections) correspond à la surface de Boy

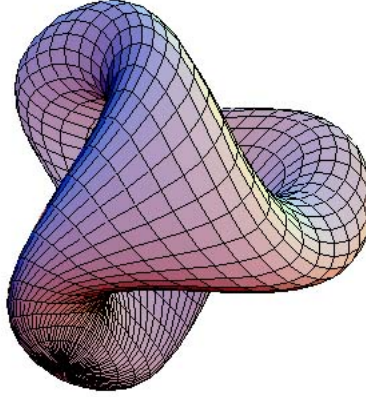


FIGURE 1 – Surface de Boy

Pour $1 \leq i \leq n + 1$, on introduit

$$U_i := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}); x^i \neq 0\},$$

et $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec

$$\psi_i([\mathbf{x}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

1. Montrer que (U_i, ψ_i) est une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et calculer son inverse.
2. Calculer les changements de cartes $\psi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}: \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$ correspondant.
3. Montrer que $\mathcal{A} = (U_i, \psi_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est un atlas qui munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ .

Solution de l'exercice 2

1. U_i est une partie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et ψ_i une bijection de U_i dans $\mathbb{R}^n$. Par définition, (U_i, ψ_i) est une carte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. En notant $\psi_i([\mathbf{x}]) = (u^1, \dots, u^n) = \mathbf{u}$, son inverse $\psi_i^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$ est donnée par

$$\psi_i^{-1}(\mathbf{u}) = [u^1 : \dots : u^{i-1} : 1 : u^i : \dots : u^n]$$

avec, $[\mathbf{x}] = [x^1 : \dots : x^{n+1}]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, $[\mathbf{x}] = [x^1 : \dots : x^{n+1}] = [\lambda x^1 : \dots : \lambda x^{n+1}]$.

2. On a $[\mathbf{x}] \in U_i \cap U_j$ et on note $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ les images de $[\mathbf{x}]$ par ψ_i et ψ_j respectivement. Pour $i < j$, le changement de carte est donné par

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(\mathbf{u}) = \left(\frac{u^1}{u^j}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^j}, \frac{1}{u^j}, \frac{u^i}{u^j}, \dots, \frac{u^{j-1}}{u^j}, \frac{u^{j+1}}{u^j}, \dots, \frac{u^n}{u^j} \right) = (v^1, \dots, v^n) = \mathbf{v}$$

3. Les changements de carte sont rationnels donc C^∞ , l'atlas $\mathcal{A} = (U_i, \psi_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ munit donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ (et même analytique).

Exercice 3 Les variétés de Stiefel et Grassmann

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit l'ensemble

$$V_k(\mathbb{R}^n) := \{X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n); \text{rang}(X) = k\}.$$

$V_k(\mathbb{R}^n)$ est donc l'ensemble des matrices rectangulaires

$$\begin{pmatrix} X^1_1 & \cdots & X^1_k \\ X^2_1 & \cdots & X^2_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X^n_1 & \cdots & X^n_k \end{pmatrix}$$

qui peuvent s'interpréter comme un système de k vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit un k -repère dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $V_k(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ et donc une variété de dimension kn qu'on appelle la *variété de Stiefel*.

On introduit aussi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, noté $G_k(\mathbb{R}^n)$, et appelé la *Grassmannienne* des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que $G_k(\mathbb{R}^n)$ est une variété différentielle de dimension $k(n-k)$ et de produire un atlas de cette variété.

Remarque : pour $k = 1$, on a bien sûr $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, les Grassmanniennes sont donc des généralisations des espaces projectifs.

1. Par définition, un point X de $V_k(\mathbb{R}^n)$ engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension k . Montrer que deux éléments X et Y de $V_k(\mathbb{R}^n)$ engendrent le même sous-espace si et seulement si, il existe un élément A du groupe $\text{GL}_k(\mathbb{R})$ tel que $Y = XA$.

La variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ correspond donc à l'espace quotient (ou espace des orbites)

$$G_k(\mathbb{R}^n) \simeq V_k(\mathbb{R}^n)/\text{GL}_k(\mathbb{R}),$$

où un point $[X]$ de l'espace quotient $V_k(\mathbb{R}^n)/\text{GL}_k(\mathbb{R})$ correspond à l'ensemble de tous les k -repères X de $V_k(\mathbb{R}^n)$ qui engendrent un même sous-espace vectoriel E de $G_k(\mathbb{R}^n)$. Pour toute partie I de cardinal k de $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$, on note $J := \mathbb{N}_n \setminus I$ sa partie complémentaire.

2. Étant donné $X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, on désigne par X_I le mineur de taille $k \times k$ extrait de X par les lignes indexées par I . Montrer que

$$(XA)_I = X_I A, \quad (XA)_J = X_J A, \quad \forall A \in \text{GL}_k(\mathbb{R}),$$

3. Dédurre de la question précédente que

$$\det(XA)_I = \det X_I \det A, \quad \forall A \in \text{GL}_k(\mathbb{R}),$$

et que

$$(XA)_J (XA)_I^{-1} = X_J (X_I)^{-1}.$$

On déduit alors que l'ensemble

$$U_I := \{[X] \in G_k(\mathbb{R}^n); \det X_I \neq 0\}$$

et l'application

$$\psi_I[X] := X_J X_I^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}),$$

définie sur U_I sont bien définis sur $G_k(\mathbb{R}^n)$, car ils ne dépendent pas du représentant $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$ choisi.

4. Montrer que les cartes locales (U_I, ψ_I) forment un atlas de classe C^∞ de $G_k(\mathbb{R}^n)$. Expliciter les changements de cartes.

Solution de l'exercice 3

1. Soit X et Y deux éléments de $V_k(\mathbb{R}^n)$ qui engendrent le même sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ de dimension k . Alors, $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq k}$ forment deux bases de E et il existe $A \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$ tel que $Y_j = \sum_k X_k A_j^k$, qui s'écrit aussi matriciellement $Y = XA$. Pour tout $v \in E$

$$v = \sum_i v^i X_i = \sum_j w^j Y_j = \sum_j w^j \left(\sum_k X_k A_j^k \right) = \sum_k \left(A_j^k w^j \right) X_k$$

On retrouve l'expression du changement de base $v^i = A_j^i w^j$. Inversement, si $Y = XA$, alors $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq k}$ engendrent le même espace vectoriel.

2. On montre facilement que le mineur $(XA)_I$ de taille $k \times k$ extrait de XA par les lignes indexées par I est égal au produit du mineur X_I avec A . Ainsi

$$(XA)_I = X_I A, \quad (XA)_J = X_J A, \quad \forall A \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$$

3. On déduit de la question précédente que pour tout $A \in \text{GL}_k(\mathbb{R})$

$$\det(XA)_I = \det(X_I A) = \det X_I \det A$$

et que

$$(XA)_J (XA)_I^{-1} = X_J A (X_I A)^{-1} = X_J A A^{-1} (X_I)^{-1} = X_J (X_I)^{-1}.$$

4. Pour calculer l'inverse ψ_I^{-1} sachant que $\psi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ et $\psi_I[X] = X_J X_I^{-1} = U$, on cherche Z tel que $Z_J = U$ et $Z_I = \text{Id}$. Ainsi, $\psi_I[Z] = U$ et $[Z] = \psi_I^{-1}(U)$. On a alors

$$Z_j^i = \begin{cases} \delta_j^p, & \text{si } i = i_p \in I = \{i_1 < \dots < i_k\}, \\ U_j^i, & \text{si } i \notin I, \end{cases}$$

avec i_p la renumérotation des indices de I . On note $\psi_{I_1}[X] = U$, on calcule le changement de cartes

$$(\psi_{I_2} \circ \psi_{I_1}^{-1})(U) = \psi_{I_2}[Z] = Z_{J_2} Z_{I_2}^{-1} = V.$$

L'application $U \mapsto Z(U)$ est clairement affine alors que $Z \mapsto V(Z)$ est rationnelle, donc les changements de carte sont C^∞ . Les cartes locales (U_I, ψ_I) forment un atlas de classe C^∞ , qui munit $G_k(\mathbb{R}^n)$ d'une structure de variété différentielle de dimension $k(n-k)$.

Exercice 4 Le groupe orthogonal comme sous-variété

Soit $O(3)$ le groupe des matrices orthogonales (c'est à dire des transformations linéaires de $\mathbb{R}^3$ qui préservent le produit scalaire),

$$O(3) = \{P \in M_3(\mathbb{R}); P^t P = I\}$$

1. En utilisant l'application

$$f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \quad P \mapsto P^t P - I$$

et le théorème de la submersion, montrer que $O(3)$ est une sous-variété de $M_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

2. Calculer l'espace tangent au point I .

Solution de l'exercice 4

1. On a $O(3) = \{P \in M_3(\mathbb{R}); f(P) = 0\}$. L'application f est lisse et son application linéaire tangente au point P s'écrit

$$T_P f : M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \quad \delta P \mapsto P^t \delta P + \delta P^t P.$$

Si de plus $P \in O(3)$, alors $P^t P = I$ et on va montrer que $T_P f$ est surjective. Soit $A \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$, il faut trouver $\delta P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que

$$P^t \delta P + \delta P^t P = A.$$

Si $P = I$, cette équation s'écrit $\delta P + \delta P^t = A$. On a alors à résoudre

$$\delta P + \delta P^t = A.$$

Une solution particulière (symétrique) s'écrit donc $\delta P = \frac{1}{2}A$.

Si P est quelconque mais dans $O(3)$, on a à résoudre $P^t \delta P + \delta P^t P = A$. Une solution particulière est $\delta P = \frac{1}{2}PA$, car $P^t P = I$.

Conclusion : f est donc bien une submersion en tout $P \in O(3)$ et $O(3)$ est une sous-variété lisse de $M_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ de dimension

$$\dim M_3(\mathbb{R}) - \dim \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3) = 9 - 6 = 3.$$

2. L'espace tangent en l'identité à $O(3)$ s'écrit

$$T_I O(3) = \ker T_I f = \{\delta P \in M_3(\mathbb{R}); \delta P + \delta P^t = 0\}.$$

C'est l'espace des matrices antisymétriques. On note cet espace $\mathfrak{o}(3)$, c'est aussi l'espace des rotations infinitésimales.

Exercice 5 La variété TM est orientable

Soit M une variété de dimension n et (x^i) un système de coordonnées (une carte locale) sur M . Un vecteur tangent ξ_m de l'espace tangent $T_m M$ au point m a alors pour expression

$$\xi_m = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Un second système de coordonnées (y^j) sur M induit une seconde expression du vecteur tangent ξ_m en m ,

$$\xi_m = \mu^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Une fois donné un atlas de M , on en déduit alors un atlas particulier de TM (constitué des cartes (x^i, λ^i) , (y^j, μ^j) , (z^k, ν^k) , $\dots$, où les cartes (x^i) , (y^j) , (z^k) , $\dots$, forment un atlas de M).

1. Considérons deux cartes locales $X = (x^i, \lambda^i)$ et $Y = (y^j, \mu^j)$ de TM . On note $y^j = \phi^j(x^i)$ le changement de coordonnées (de cartes) sur M . Expliciter le changement de carte sur TM .
2. Déterminer la matrice $\frac{\partial Y}{\partial X}$ de l'application linéaire tangente au changement de coordonnées sur TM

$$\delta X = (\delta x^i, \delta \lambda^i) \mapsto \delta Y = (\delta y^j, \delta \mu^j),$$

et en déduire que son jacobien est positif. En conclure que la variété TM est orientable.

Solution de l'exercice 5

1. Le changement de carte correspondant sur TM est $\Phi: X = (x^i, \lambda^i) \mapsto Y = (y^j, \mu^j)$, avec

$$\begin{cases} y^j = \phi^j(x^i) \\ \mu^j = \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} \lambda^i \end{cases}$$

Remarque : On a de plus

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = P^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{où} \quad (P^i_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) = \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \right)^{-1}.$$

2. La matrice de l'application linéaire tangente $T\Phi$ s'écrit

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} & \frac{\partial \mu^j}{\partial x^i} \\ 0 & \frac{\partial \lambda^j}{\partial x^i} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \mu^j}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Son jacobien

$$J = \det \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right) = \left(\det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \right)^2$$

est positif.

Conclusion : Pour l'atlas considéré de TM , tous les changements de carte sont à jacobien positif. La variété TM est donc orientable (même si la variété M ne l'est pas).

Problème des extrema liés par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Considérons le problème de la recherche des minima d'une fonction $\mathcal{F}$ sous la contrainte f , *i.e.*

$$\min_{f(x)=0} \mathcal{F}(x).$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange formule des conditions nécessaires pour qu'un point x soit solution du problème, sous la condition que la contrainte f soit une submersion (*i.e.* que $\text{grad } f \neq 0$). Cette condition semble avoir été oubliée par de nombreux utilisateurs de cette méthode. Dans l'exercice qui suit, on illustre le fait que, sans cette condition, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne mène nulle part.

En effet, considérons le calcul de la distance Δ d'une matrice 3×3 déviatorique d'ordre deux $\mathbf{h}_0$ (ayant, en général, 3 valeurs propres distinctes) à l'ensemble des matrices isotropes transverses (*i.e.* ayant 2 valeurs propres égales). Ce problème se formule comme la minimisation sous contrainte

$$\Delta^2 = \min_{f(\mathbf{h})=0} \mathcal{F}(\mathbf{h}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h} - \mathbf{h}_0\|^2.$$

où

$$f(\mathbf{h}) = (\text{tr } \mathbf{h}^2)^3 - 6 (\text{tr } \mathbf{h}^3)^2.$$

Comme nous le montrerons, $\text{grad}_{\mathbf{h}} f = 0$ pour tout $\mathbf{h}$ satisfaisant $f(\mathbf{h}) = 0$. Dans ce cas, le problème des multiplicateurs de Lagrange conduit à

$$\text{grad}_{\mathbf{h}} \mathcal{F} + \lambda \text{grad}_{\mathbf{h}} f = \text{grad}_{\mathbf{h}} \mathcal{F} = 2(\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) = 0,$$

ce qui mène à une contradiction.

Exercice 6 Le cas des tenseurs d'ordre 2 isotropes transverses

On note $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$ le sous-espace de $\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ des matrices de trace nulle (*i.e.* déviatoriques). On s'intéresse au sous-ensemble S des matrices $\mathbf{h}$ déviatoriques isotropes transverses, *i.e.* ayant deux valeurs propres égales. On rappelle qu'une forme normale de ces matrices est

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\text{tr } \mathbf{h}^3}{\text{tr } \mathbf{h}^2} \neq 0. \quad (3)$$

1. Montrer que si $\mathbf{h}$ est isotrope transverse alors

$$f(\mathbf{h}) := (\text{tr } \mathbf{h}^2)^3 - 6 (\text{tr } \mathbf{h}^3)^2 = 0 \quad \text{avec } \mathbf{h} \neq 0.$$

(on admet la réciproque).

2. Calculer le gradient

$$\text{grad}_{\mathbf{h}} f$$

et montrer que $\text{grad}_{\mathbf{h}} f = 0$ pour tout $\mathbf{h}$ isotrope transverse.

3. Peut-on en déduire, à l'aide du théorème de la submersion, que

$$S = \{ \mathbf{h} \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3), f(\mathbf{h}) = 0 \},$$

est une sous-variété de $\mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3)$?

Solution de l'exercice 6

1. Si la matrice $\mathbf{h}$ est isotrope transverse, il existe une base dans laquelle elle a pour expression (3), avec $\text{tr } \mathbf{h}^2 = 6\lambda^2$ et $\text{tr } \mathbf{h}^3 = 6\lambda^3$. Soit $f = 0$.
2. Pour $k = 2, 3$, on a ($\mathbf{h}$ étant déviatorique)

$$\text{tr } \mathbf{h}^k = \text{tr}(\mathbf{h}^{k-1}\mathbf{h}) = \text{tr}((\mathbf{h}^{k-1})'\mathbf{h}) = (\mathbf{h}^{k-1})' : \mathbf{h} = \langle (\mathbf{h}^{k-1})', \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2},$$

où $(\mathbf{h}^{k-1})' = \mathbf{h}^{k-1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{h}^{k-1})\mathbf{Id}$ désigne la partie déviatorique de $\mathbf{h}^{k-1}$. On a de plus

$$d \text{tr } \mathbf{h}^2 . \delta \mathbf{h} = 2 \langle \mathbf{h}, \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2}, \quad d \text{tr } \mathbf{h}^3 . \delta \mathbf{h} = 3 \langle (\mathbf{h}^2)', \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2}.$$

avec

$$(\mathbf{h}^2)' = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda^2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \end{pmatrix} = \frac{\text{tr } \mathbf{h}^3}{\text{tr } \mathbf{h}^2} \mathbf{h}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} df . \delta \mathbf{h} &= \langle 6(\text{tr } \mathbf{h}^2)^2 \mathbf{h}, \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2} - \langle 36(\text{tr } \mathbf{h}^3) (\mathbf{h}^2)', \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2} \\ &= 6 \langle (\text{tr } \mathbf{h}^2)^2 \mathbf{h} - 6(\text{tr } \mathbf{h}^3) (\mathbf{h}^2)', \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2} \\ &= 6 \left\langle (\text{tr } \mathbf{h}^2)^2 \mathbf{h} - 6 \frac{(\text{tr } \mathbf{h}^3)^2}{\text{tr } \mathbf{h}^2} \mathbf{h}, \delta \mathbf{h} \right\rangle_{\mathbb{H}^2} \\ &= \langle \text{grad}_{\mathbf{h}} f, \delta \mathbf{h} \rangle_{\mathbb{H}^2} \end{aligned}$$

soit

$$\text{grad}_{\mathbf{h}} f = \frac{6f}{\text{tr } \mathbf{h}^2} \mathbf{h} = 0.$$

On en conclut que $f : \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une submersion pour les matrices $\mathbf{h}$ isotropes transverses.

3. Non, car le théorème de la submersion ne s'applique pas (f n'est pas une submersion sur $S = f^{-1}(0)$).

1.2 Champs de vecteurs sur une variété

Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Ce champ définit une équation différentielle ordinaire

$$\dot{c}(t) = X(c(t)).$$

Theorem 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$). Alors, pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de $\mathbf{x}_0$ et $\varepsilon > 0$ tel que le problème initial*

$$\dot{c}(t) = X(c(t)), \quad c(0) = \mathbf{x}$$

avec $\mathbf{x} \in U$ admet une solution $c(t)$ définie sur l'intervalle $] -\varepsilon, \varepsilon[$, de classe C^{k+1} . De plus cette solution est unique et dépend de manière C^k de la condition initiale.

On notera cette solution $c(t)$ de manière plus précise par $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi^t(\mathbf{x})$, où t est le temps et $\mathbf{x}$ est la condition initiale. Cette application φ est définie sur un voisinage de $t = 0$ et de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Elle vérifie bien évidemment $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. On l'appelle le *flot* du champ de vecteurs X . Pour chaque t , φ^t est un difféomorphisme local (unicité de la solution et dépendance C^k à la condition initiale).

Exercice 7 Flot d'un champ de vecteurs

1. Soit X le champ radial sur $\mathbb{R}^n$ défini par $X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?
2. Soit X le champ radial avec origine $\mathbf{x}_0$ sur $\mathbb{R}^n$ défini par $X(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?
3. On se place dans $\mathbb{R}$ et on introduit le champ de vecteur $X(x) = x^2$. Calculer son flot. Celui-ci est-il défini pour toute valeur de t ?

Solution de l'exercice 7

1. On a à résoudre $\dot{c}^i(t) = c^i(t)$ ($1 \leq i \leq n$), qui s'intègre immédiatement en $c^i(t) = C^i e^t$, où C^i est une constante d'intégration. Comme, de plus, on suppose $c(0) = \mathbf{x}$, on a donc $C^i = x^i$ et finalement

$$\varphi^t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) = e^t \mathbf{x}.$$

2. On a à résoudre $\dot{c}^i(t) = c^i(t) - x_0^i$ ($1 \leq i \leq n$), qui s'intègre en

$$c^i(t) = C^i e^t + x_0^i, \quad \text{avec } c^i(0) = x^i.$$

On a donc $C^i = x^i - x_0^i$ et donc

$$\varphi^t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) = e^t \mathbf{x} + (1 - e^t) \mathbf{x}_0.$$

3. On a $n = 1$ pour cette question, donc le champ X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a à résoudre

$$\dot{y} = X(y(t)) = (y(t))^2.$$

Cette équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

se réécrit

$$\frac{dy}{y^2} = -d\left(\frac{1}{y}\right) = dt$$

qui s'intègre en

$$-\frac{1}{y} = t + C,$$

où C est une constante d'intégration. Comme $y(0) = x$, on trouve finalement

$$y = \varphi^t(x) = \varphi(t, x) = \frac{x}{1 - xt}.$$

La valeur initiale x étant fixée, cette solution n'est pas définie pour tout t car le flot explose quand $t = 1/x$. L'intervalle maximal d'existence est défini par $] - \infty, \frac{1}{x}[$ si $x > 0$ et $]\frac{1}{x}, +\infty[$ si $x < 0$. Pour $x = 0$, le flot est stationnaire $\varphi^t(0) = 0$, pour tout $t \in] - \infty, +\infty[$.

Exercice 8 Propriété de sous-groupe à un paramètre

Soit X un champ de vecteurs et φ^t son flot. Montrer que si φ^t , φ^s et φ^{t+s} sont définis, alors

$$\varphi^{t+s}(\mathbf{x}) = \varphi^t(\varphi^s(\mathbf{x})) = \varphi^s(\varphi^t(\mathbf{x})).$$

Solution de l'exercice 8

Par définition du flot :

$$\varphi^t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

on a donc

$$\varphi^{t+s}(\mathbf{x}) = \varphi(t + s, \mathbf{x}) = \varphi^{s+t}(\mathbf{x}).$$

Fixons maintenant s et posons $\psi(t, \mathbf{x}) := \varphi(t + s, \mathbf{x})$. Alors

$$\partial_t \psi(t, \mathbf{x}) = \partial_t \varphi(t + s, \mathbf{x}) = X(\varphi(t + s, \mathbf{x})) = X(\psi(t, \mathbf{x})).$$

Comme de plus $\psi(0, \mathbf{x}) = \varphi(s, \mathbf{x}) = \varphi^s(\mathbf{x})$, $\psi(t, \mathbf{x})$ est donc la solution de l'équation différentielle

$$\dot{c}(t) = X(c(t)), \quad c(0) = \varphi^s(\mathbf{x}).$$

Du fait de l'unicité de la solution, on a

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \varphi^s(\mathbf{x})),$$

soit

$$\varphi(t + s, \mathbf{x}) = \varphi(t, \varphi^s(\mathbf{x})) = \varphi^t(\varphi^s(\mathbf{x})).$$

En inversant les rôles de s et t , on a donc finalement

$$\varphi^{t+s}(\mathbf{x}) = \varphi(t + s, \mathbf{x}) = \varphi^t(\varphi^s(\mathbf{x})) = \varphi^s(\varphi^t(\mathbf{x})).$$

Exercice 9 Champ de vecteurs dépendant du temps

Un « champ de vecteur dépendant du temps » sur une variété M est un champ de vecteur $\mathbf{u}(t)$ dépendant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$ de sorte que :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le problème de Cauchy associé s'écrit :

$$\dot{c}(t) = \mathbf{u}(t, c(t)), \quad c(s) = x. \quad (4)$$

La solution de ce problème, fournie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, définit un flot, noté φ_s^t défini par

$$\partial_t \varphi_s^t(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \varphi_s^t(\mathbf{x})), \quad \varphi_s^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Introduisons la variété $\widetilde{M} := \mathbb{R} \times M$. Alors l'espace tangent en un point $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$ s'écrit

$$T_{(t,m)}(\mathbb{R} \times M) = \mathbb{R} \oplus T_x M.$$

On définit alors le champ de vecteur $\widetilde{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) = \partial_t + \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ sur $\widetilde{M}$, dont le flot s'écrit

$$\tilde{\varphi}^\tau(t, \mathbf{x}) = (\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}), \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x})) \in \mathbb{R} \times M.$$

1. Montrer que $\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}) = \tau + t$.
2. Montrer que $\varphi_s^t(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x})$.
3. De la propriété de sous-groupe à un paramètre vérifiée par $\tilde{\varphi}$, en déduire que

$$\varphi_s^t = \varphi_r^t \circ \varphi_s^r, \quad \forall r, s, t.$$

Solution de l'exercice 9

1. On a, par définition :

$$\partial_\tau \tilde{\varphi}^\tau(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\varphi}^\tau(t, \mathbf{x})), \quad \tilde{\varphi}^0(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x}).$$

On en déduit, par projection sur les deux facteurs $\mathbb{R}$ et M , que :

$$\partial_\tau \tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}) = 1, \quad \text{et} \quad \partial_\tau \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}), \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x})),$$

avec

$$\tilde{\varphi}_1^0(t, \mathbf{x}) = t, \quad \tilde{\varphi}_2^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

La première équation s'intègre en $\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}) = \tau + C^{ste}$ et comme $\tilde{\varphi}_1^0(t, \mathbf{x}) = t$, on a finalement

$$\tilde{\varphi}_1^\tau(t, \mathbf{x}) = \tau + t.$$

2. De la question précédente, on déduit que $\tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x})$ est solution du problème de Cauchy

$$\partial_\tau \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\tau + t, \tilde{\varphi}_2^\tau(t, \mathbf{x})), \quad \tilde{\varphi}_2^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Posons $\phi_s^t(\mathbf{x}) := \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x})$. On en déduit alors que :

$$\partial_t \phi_s^t(\mathbf{x}) = \partial_t \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x})) = \mathbf{u}(t, \phi_s^t(\mathbf{x}))$$

avec $\phi_s^s(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2^0(s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Par unicité du problème de Cauchy (4), on en déduit que :

$$\phi_s^t(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2^{t-s}(s, \mathbf{x}) = \varphi_s^t(\mathbf{x})$$

est le flot du champ de vecteurs dépendant du temps $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

3. La propriété de sous-groupe à un paramètre vérifiée par le flot $\tilde{\varphi}^\tau$ de $\tilde{\mathbf{u}}$ s'écrit :

$$\tilde{\varphi}^{\tau_1+\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x}) = \tilde{\varphi}^{\tau_1}(\tilde{\varphi}^{\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x})) = \tilde{\varphi}^{\tau_1}(\tau_3+\tau_2, \tilde{\varphi}_2^{\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x})) = (\tau_3+\tau_1+\tau_2, \tilde{\varphi}_2^{\tau_1}(\tau_3+\tau_2, \tilde{\varphi}_2^{\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x}))).$$

On en déduit que :

$$\tilde{\varphi}_2^{\tau_1+\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_2^{\tau_1}(\tau_3+\tau_2, \tilde{\varphi}_2^{\tau_2}(\tau_3, \mathbf{x})).$$

En substituant $\tilde{\varphi}_2^t(s, \mathbf{x})$ par $\varphi_s^{t+s}(\mathbf{x})$, on obtient :

$$\varphi_{\tau_3}^{\tau_1+\tau_2+\tau_3}(\mathbf{x}) = \varphi_{\tau_2+\tau_3}^{\tau_1+\tau_2+\tau_3}(\varphi_{\tau_3}^{\tau_2+\tau_3}(\mathbf{x})),$$

et finalement, en utilisant le changement de variables

$$t := \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad r := \tau_2 + \tau_3, \quad s := \tau_3,$$

$$\varphi_s^t = \varphi_r^t \circ \varphi_s^r.$$

Exercice 10 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Étant donné un champ de vecteur X sur une variété M , on définit l'opérateur

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto \mathcal{L}_X f := \mathrm{d}f.X = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

1. Montrer que cet opérateur est une dérivation sur l'algèbre de fonctions $C^\infty(M)$, c'est à dire un opérateur linéaire $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, qui vérifie de plus

$$\mathcal{L}_X(fg) = f(\mathcal{L}_X g) + (\mathcal{L}_X f)g, \quad \forall f, g \in C^\infty(M), \quad (\text{règle de Leibniz}).$$

2. Soit X et Y deux champs de vecteurs. Montrer que $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ est aussi une dérivation.
3. On considère un système de coordonnées locales (x^i) . Montrer que

$$(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)f = W^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

et donner l'expression de W^i .

Remarque : $W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est l'expression locale d'un champ de vecteur W , qu'on note $[X, Y]$ et qu'on appelle le *crochet de Lie* des champs X et Y . On a alors

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)f = [X, Y]^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

4. Que vaut $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]$?
5. Que vaut $[X, \frac{\partial}{\partial x^i}]$?
6. Montrer que, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z , sur M , on a
 - (a) $[Y, X] = -[X, Y]$ (antisymétrie du crochet de Lie),
 - (b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi).

Solution de l'exercice 10

1. Trivialement $\mathcal{L}_X(f + g) = df.X + dg.X = \mathcal{L}_X f + \mathcal{L}_X g$, et $\mathcal{L}_X \lambda f = \lambda \mathcal{L}_X f$, si $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathcal{L}_X$ est donc bien un opérateur linéaire. De plus

$$\mathcal{L}_X(fg) = d(fg).X = f(dg).X + g(df).X = f(\mathcal{L}_X g) + (\mathcal{L}_X f)g,$$

par la règle de Leibniz. $\mathcal{L}_X$ est donc bien une dérivation sur $C^\infty(M)$.

2. D'abord $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ est bien une application linéaire de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ car la somme et la composition d'applications linéaires le sont. Par ailleurs, en itérant la règle de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y(fg) &= \mathcal{L}_X(f(\mathcal{L}_Y g) + (\mathcal{L}_Y f)g) \\ &= f(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g) + (\mathcal{L}_X f)(\mathcal{L}_Y g) + (\mathcal{L}_Y f)(\mathcal{L}_X g) + (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f)g, \end{aligned}$$

de sorte que

$$(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)(fg) = f(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)g + [(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)f]g.$$

$(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)$ est donc bien une dérivation.

3. On a d'abord

$$\mathcal{L}_Y f = Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

En itérant, on obtient donc, en utilisant la règle de Leibniz

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f = \mathcal{L}_X \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = Y^j \mathcal{L}_X \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + \mathcal{L}_X(Y^j) \frac{\partial f}{\partial x^j} = Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

de sorte que, par le lemme de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, on obtient

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

soit

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f = W^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \text{avec} \quad W^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

et finalement

$$[X, Y]^i = W^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}. \quad (5)$$

4. On a

$$\mathcal{L}_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} f = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} f - \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0,$$

par le lemme de Schwarz, soit

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

5. On a

$$\mathcal{L}_{\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]} f = \mathcal{L}_X \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) - \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathcal{L}_X f = X^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(X^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = -\frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k},$$

par le lemme de Schwarz, soit

$$\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = -(\partial_i X^k) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Remarque : Soit $(\mathbf{e}_i)$ un repère mobile. Une condition nécessaire pour qu'il existe des coordonnées locales telles que $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ est donc que $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = 0$ pour tout i, j . On montre que cette condition est également suffisante.

6. De la définition implicite du crochet $[X, Y]$ par

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f,$$

on obtient immédiatement

$$(a) \quad [Y, X] = -[X, Y].$$

Ensuite, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[[X, Y], Z]} f &= \mathcal{L}_{[X, Y]} \mathcal{L}_Z f - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_{[X, Y]} f \\ &= (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) \mathcal{L}_Z f - \mathcal{L}_Z (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) f \\ &= \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Z f - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f + \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f, \end{aligned}$$

on en déduit, en sommant les permutations circulaires sur X, Y, Z , que

$$\mathcal{L}_{[[X, Y], Z]} f + \mathcal{L}_{[[Y, Z], X]} f + \mathcal{L}_{[[Z, X], Y]} f = 0,$$

soit

$$(b) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Remarque : l'écriture en composantes, à éviter, est très calculatoire,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z]^k &= [X, Y]^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} - Z^i \frac{\partial [X, Y]^k}{\partial x^i} \\ &= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} - Z^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} + Z^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} - Z^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \\ &\quad + Y^i Z^j \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i \partial x^j} - X^i Z^j \frac{\partial^2 Y^k}{\partial x^i \partial x^j}. \end{aligned}$$

1.3 Pullback et dérivée de Lie

Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés différentielles M et N . On introduit le *pullback* (et son inverse, le *push-forward*) qui transforme les champs de tenseurs sur N en champs de tenseurs sur M . Il y a une seule façon d'écrire un pullback et celle-ci se visualise bien à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Par exemple :

- Le pullback d'un champ de tenseurs d'ordre 0, c'est à dire d'une fonction $f \in C^\infty(N)$ s'écrit

$$\varphi^* f := f \circ \varphi.$$

- Le pullback d'une 1-forme α (un champ de covecteurs) sur N est défini par

$$(\varphi^* \alpha)_m(X_m) := \alpha_{\varphi(m)}(T_m \varphi \cdot X_m), \quad X_m \in T_m M,$$

que l'on réécrit de manière plus concise

$$(\varphi^* \alpha)(X) := (\alpha \circ \varphi)(T\varphi \cdot X) = ((\alpha \circ \varphi), T\varphi \cdot X) = ((T\varphi)^* \cdot (\alpha \circ \varphi), X), \quad X \in TM,$$

ou encore

$$\varphi^* \alpha := \alpha \circ \varphi \cdot T\varphi = (T\varphi)^* \cdot \alpha \circ \varphi.$$

- Le pullback d'un champ de vecteurs ou plus généralement d'un champ de tenseurs contra-variants ou mixtes nécessite que φ soit inversible. On a par exemple, X étant un champ de vecteurs sur N ,

$$(\varphi^* X)(m) := T_{\varphi(m)} \varphi^{-1} \cdot X(\varphi(m)),$$

que l'on réécrit

$$\varphi^* X := T\varphi^{-1} \cdot X \circ \varphi.$$

Exercice 11

1. Expliciter le pullback $\varphi^* \mathbf{k}$ d'un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, $\mathbf{k}$, à l'aide de $\mathbf{F} = T\varphi$ et $\mathbf{F}^* = (T\varphi)^*$ visualisés sur les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{(T\varphi)^*} & T^*N \\ \downarrow \pi_{T^*M} & & \downarrow \pi_{T^*N} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

2. Si $\mathbf{q}$ désigne la métrique euclidienne sur $M = N = \mathbb{R}^3$, comment s'écrit $\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q}$ dans un système de coordonnées orthonormées ? On pourra introduire $\mathbf{F}^t$ et $\mathbf{F}^*$ définis à l'aide du diagramme suivant, avec ici $\mathbf{q}_M = \mathbf{q}_N = \mathbf{q}$,

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{\mathbf{F}^*} & T^*N \\ \mathbf{q}_M \uparrow & & \uparrow \mathbf{q}_N \\ TM & \xrightarrow{\mathbf{F}} & TN \\ & \xleftarrow{\mathbf{F}^t} & \end{array} \quad \mathbf{q}_M \mathbf{F}^t = \mathbf{F}^* \mathbf{q}_N,$$

de sorte que $\mathbf{F}^t = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{q}$, soit en composantes $(\mathbf{F}^t)^I{}_j = q^{IK} (\mathbf{F}^*)_K{}^l q_{lj}$.

3. Expliciter le pullback $\varphi^*\sigma$ d'un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2, σ , dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de $\mathbf{F} = T\varphi$.

Solution de l'exercice 11

Il y a une seule façon d'écrire un pullback et celle-ci se visualise bien à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\varphi} & TN \\ \downarrow \pi_{TM} & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

1. On considère un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, $\mathbf{k}$, défini sur N . Alors $\mathbf{K} := \varphi^*\mathbf{k}$ est un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 défini sur M par la relation suivante :

$$(\varphi^*\mathbf{k})_m(X_m, Y_m) = \mathbf{k}_{\varphi(m)}(\mathbf{F}_m \cdot X_m, \mathbf{F}_m \cdot Y_m), \quad X_m, Y_m \in T_m M.$$

En utilisant la convention du deuxième indice, telle que $\mathbf{K}(X, Y) = (\mathbf{K}Y, X) = X^i K_{ij} Y^j$, on obtient

$$\begin{aligned} (\varphi^*\mathbf{k})(X, Y) &= (\mathbf{k} \circ \varphi)(\mathbf{F} \cdot X, \mathbf{F} \cdot Y) \\ &= ((\mathbf{k} \circ \varphi) \mathbf{F} \cdot Y, \mathbf{F} \cdot X) \\ &= (\mathbf{F}^*(\mathbf{k} \circ \varphi) \mathbf{F} \cdot Y, X) \\ &= (\mathbf{F}^*(\mathbf{k} \circ \varphi) \mathbf{F})(X, Y). \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\varphi^*\mathbf{k} = \mathbf{F}^*(\mathbf{k} \circ \varphi) \mathbf{F}.$$

2. En appliquant ce résultat dans le cas particulier où $M = N = \mathbb{R}^3$, où $\mathbf{k} = \mathbf{q}$ est la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ et où on choisit comme système de coordonnées, les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice des composantes de $\mathbf{q}$ se réduit à la matrice identité (δ_{ij}) et la formule précédente s'écrit (en notations matricielles abusives) :

$$\mathbf{C} = \varphi^*\mathbf{q} = \mathbf{F}^*\mathbf{q}\mathbf{F} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{F}^t\mathbf{F} = \mathbf{F}^t\mathbf{F}.$$

C'est la définition du *tenseur de Cauchy-Green droit* qu'on trouve dans les livres de mécanique. Bien sûr, dans un système de coordonnées quelconque (non orthonormées), l'expression $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t\mathbf{F}$ n'est plus valable !

3. Passons maintenant à l'expression du pullback $\Sigma := \varphi^*\sigma$ d'un champ de tenseurs contravariants σ d'ordre 2, défini sur N . On peut considérer celui-ci comme une forme bilinéaire qui « mange » des vecteurs covariants et la seule façon « naturelle » de définir un champ de tenseurs contravariants sur M à l'aide de φ s'écrit :

$$(\varphi^*\sigma)_m(\alpha_m, \beta_m) = \sigma_{\varphi(m)}(\alpha_m \circ F_m^{-1}, \beta_m \circ F_m^{-1}) = \sigma_{\varphi(m)}(F_m^{-*}\alpha_m, F_m^{-*}\beta_m),$$

où $\alpha_m, \beta_m \in T_m^*M$. En utilisant la convention du deuxième indice, telle que $\Sigma(\alpha, \beta) = (\alpha, \Sigma\beta) = \alpha_i \Sigma^{ij} \beta_j$, on obtient

$$\begin{aligned} (\varphi^*\sigma)(\alpha, \beta) &= (\sigma \circ \varphi)(\mathbf{F}^{-*}\alpha, \mathbf{F}^{-*}\beta) \\ &= (\mathbf{F}^{-*}\alpha, (\sigma \circ \varphi)(\mathbf{F}^{-*}\beta)) \\ &= (\alpha, \mathbf{F}^{-1}(\sigma \circ \varphi)(\mathbf{F}^{-*}\beta)) \\ &= (\mathbf{F}^{-1}(\sigma \circ \varphi) \mathbf{F}^{-*})(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\varphi^* \sigma = \mathbf{F}^{-1}(\sigma \circ \varphi) \mathbf{F}^{-*}.$$

Dans cette dernière expression, on fait intervenir l'inverse $(\mathbf{F}^*)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^*$, que l'on note $\mathbf{F}^{-*}$, de la transposée $\mathbf{F}^*$ (non métrique) de $\mathbf{F}$.

Le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ d'une variété différentielle M agit linéairement sur tout espace $\mathbb{T}(M)$, de champs de tenseurs sur M . Plus précisément, l'application

$$\rho : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{T}(M)), \quad \varphi \mapsto \rho(\varphi) = \varphi_*$$

satisfait

$$\rho(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \rho(\varphi_1) \rho(\varphi_2).$$

Pour des raisons historiques, c'est en général l'action (à droite) $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ qui est plutôt considérée. La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs $\mathbf{T} \in \mathbb{T}(M)$ correspond à l'action infinitésimale de cette action. Plus précisément. Soit $\varphi(t)$ un chemin de difféomorphismes avec $\varphi(0) = id$ et $\dot{\varphi}(0) = X$, alors

$$\mathcal{L}_X \mathbf{T} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t)^* \mathbf{T},$$

où $\mathbf{T}$ est un champ de tenseur quelconque défini sur M .

Remark 5. On peut appliquer, en particulier, la formule précédente sur le flot $\varphi(t)$ de X , c'est à dire le chemin de difféomorphismes $\varphi(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\partial_t \varphi(t, m) = X(\varphi(t, m)), \quad \varphi(0, m) = m.$$

Exercice 12

1. Que vaut $\mathcal{L}_X f$ quand f est une fonction ?
2. En déduire l'expression locale de $\mathcal{L}_X f$.

Solution de l'exercice 12

1. On a (avec $X(m) = \dot{\varphi}(0)(m)$)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)(m) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t)^* f)(m) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(t)(m)) \\ &= d_m f \cdot X(m), \end{aligned}$$

où $X(m) = \dot{\varphi}(0)(m)$. Pour une fonction, $(\mathcal{L}_X f)(m)$ est simplement la différentielle de f au point m dans la direction $X(m)$.

2. En coordonnées locales, on a donc

$$\mathcal{L}_X f = X^j \partial_j f.$$

Exercice 13 Règle de Leibniz

1. Montrer que si α est une 1-forme sur N , Y , un champ de vecteur sur N et φ , un difféomorphisme de M dans N , on a :

$$\varphi^*(\alpha(Y)) = (\varphi^* \alpha)(\varphi^* Y).$$

2. En déduire que :

$$\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) + \alpha(\mathcal{L}_X Y),$$

i.e., la règle de Leibniz est une conséquence du fait que le pull-back commute avec la contraction.

Solution de l'exercice 13

1. On a :

$$\varphi^* \alpha = (T\varphi)^* \cdot \alpha \circ \varphi, \quad \varphi^* Y := (T\varphi)^{-1} \cdot Y \circ \varphi.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} (\varphi^* \alpha)(\varphi^* Y) &= (\varphi^* \alpha, \varphi^* Y) = ((T\varphi)^* \cdot \alpha \circ \varphi, (T\varphi)^{-1} \cdot Y \circ \varphi) \\ &= (\alpha \circ \varphi, T\varphi(T\varphi)^{-1} \cdot Y \circ \varphi) \\ &= (\alpha \circ \varphi, Y \circ \varphi) \\ &= \alpha(Y) \circ \varphi, \\ &= \varphi^*(\alpha(Y)), \end{aligned}$$

$\alpha(Y)$ étant une fonction.

2. Si $\varphi(t)$ est un chemin de difféomorphismes, on a

$$(\varphi(t)^* Y)(m) \in T_m M, \quad \forall t,$$

et

$$(\varphi(t)^* \alpha)_m \in T_m^* M, \quad \forall t.$$

La dérivation en t de $(\varphi^* \alpha)_m((\varphi^* Y)(m))$ consiste donc à dériver une forme bilinéaire définie sur le produit cartésien $T_m^* M \times T_m M$ de deux espaces vectoriels de dimension finie. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t)^* \alpha(Y)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t)^* \alpha)(\varphi(t)^* Y) \\ &= (\varphi(0)^* \alpha) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t)^* Y) + \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi(t)^* \alpha) \right) (\varphi(0)^* Y) \\ &= \alpha(\mathcal{L}_X Y) + (\mathcal{L}_X \alpha)(Y). \end{aligned}$$

Exercice 14 Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Soit f une fonction. On rappelle que si φ une application différentiable, alors

$$d(\varphi^* f) = \varphi^*(df).$$

1. Soit Y un champ de vecteurs et φ un difféomorphisme. Montrer que

$$\varphi^*(\mathcal{L}_Y f) = \mathcal{L}_{\varphi^* Y}(\varphi^* f).$$

2. En déduire que

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f.$$

3. Conclure que

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y,$$

où $[X, Y]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y , implicitement défini par

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X) f.$$

Solution de l'exercice 14

1. On a

$$\varphi^*(\mathcal{L}_Y f) = \varphi^*(df \cdot Y) = \varphi^*(df) \cdot \varphi^* Y = d(\varphi^* f) \cdot \varphi^* Y = \mathcal{L}_{\varphi^* Y}(\varphi^* f).$$

2. Soit $\varphi(t)$ un chemin de difféomorphismes tel que $\varphi(0) = \text{id}$ et $\dot{\varphi}(0) = X$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t)^*(\mathcal{L}_Y f) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{L}_{\varphi(t)^* Y} \varphi(t)^* f \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\varphi(t)^* f) \cdot \varphi(t)^* Y \\ &= d \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t)^* f \right) \cdot \varphi(0)^* Y + d(\varphi(0)^* f) \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t)^* Y \\ &= d(\mathcal{L}_X f) \cdot Y + df \cdot \mathcal{L}_X Y \\ &= \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f + \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f. \end{aligned}$$

3. On en déduit immédiatement que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_{[X, Y]} f,$$

et donc que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Exercice 15 Champs de vecteurs qui commutent

Soit X et Y deux champs de vecteurs définis sur une variété différentielle M . On désigne leur flots respectifs par φ^t et ψ^s .

1. Montrer que les flots commutent, c'est-à-dire que $\psi^s \circ \varphi^t = \varphi^t \circ \psi^s$ si et seulement si $[X, Y] = 0$.

Solution de l'exercice 15

1. Si les flots commutent, alors on a pour tout $x \in M$

$$\varphi^{-t} \circ \psi^s \circ \varphi^t(x) = \psi^s(x) = \varphi(-t, \psi(s, \varphi(t, x)))$$

On dérive cette expression par rapport à s en $s = 0$:

$$\partial_s|_{s=0}(\varphi^{-t} \circ \psi^s \circ \varphi^t) = T\varphi^{-t} \cdot Y \circ \varphi^t$$

Sachant que $T\varphi^{-t} \cdot Y \circ \varphi^t = (\varphi^t)^* Y$ et que $\partial_s|_{s=0} \psi^s = Y$, on obtient $(\varphi^t)^* Y = Y$. Sachant que $\partial_t|_{t=0}(\varphi^t)^* Y = \mathcal{L}_X Y$ et que Y ne dépend pas de t , on a

$$\partial_t|_{t=0}(\varphi^t)^* Y = \mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$$

On considère maintenant le problème inverse. Si $[X, Y] = 0$ et sachant que $\partial_t(\varphi^t)^* Y = (\varphi^t)^* \mathcal{L}_X Y$, on a

$$\partial_t((\varphi^t)^* Y - Y) = (\varphi^t)^* \mathcal{L}_X Y = 0$$

donc, $(\varphi^t)^* Y = Y$. Notons maintenant $\tilde{\psi}(s, x) = \varphi^{-t} \circ \psi^s \circ \varphi^t(x)$, avec $\partial_s \tilde{\psi} = Y \circ \tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi}(0, x) = x$.

$$\partial_s \tilde{\psi} = T\varphi^{-t}.Y \circ \psi^s \circ \varphi^t = (T\varphi^{-t}.Y \circ \varphi^t) \circ (\varphi^{-t} \circ \psi^s \circ \varphi^t) = (\varphi^t)^* Y (\tilde{\psi}^s) = Y (\tilde{\psi}^s)$$

Par unicité du flot on a $\tilde{\psi}^s = \psi^s$, et donc les flots commutent si et seulement si $[X, Y] = 0$.

Exercice 16 Dérivée de Lie de la métrique euclidienne

1. Soit X un champ de vecteurs défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{q}$ la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que les composantes de $\mathcal{L}_X \mathbf{q}$ dans un système de coordonnées locales (x^i) de Ω s'écrivent

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = X^k \partial_k q_{ij} + q_{kj} \partial_i X^k + q_{il} \partial_j X^l.$$

Cette formule reste valable si $X = \mathbf{u}(t)$ est un champ de vecteurs dépendant du temps.

2. Que valent ces composantes dans un système de coordonnées linéaires (x^i) définies à partir d'une base $(\mathbf{e}_i)$ de $\mathbb{R}^3$,
 - (a) non nécessairement orthonormée,
 - (b) orthonormée.
3. Donner l'interprétation mécanique du résultat précédent lorsque Ω est la configuration déformée de la Mécanique des Milieux Continus (plongée dans $\mathbb{R}^3$), et $X = \mathbf{u}$ est le champ des vitesses eulériennes.

Solution de l'exercice 16

1. Dans les coordonnées (x^i) , et en utilisant la règle de Leibniz, on trouve

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} &= (\mathcal{L}_X \mathbf{q})(\partial_i, \partial_j) \\ &= (\mathcal{L}_X (\mathbf{q}(\partial_i, \partial_j))) - \mathbf{q}(\mathcal{L}_X \partial_i, \partial_j) - \mathbf{q}(\partial_i, \mathcal{L}_X \partial_j) \\ &= (\mathcal{L}_X q_{ij}) - (\mathcal{L}_X \partial_i)^k q_{kj} - (\mathcal{L}_X \partial_j)^l q_{il}, \end{aligned}$$

où la fonction q_{ij} est définie par $q_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\partial_i, \partial_j)$. On a $\mathcal{L}_X q_{ij} = dq_{ij}.X = X^k \partial_k q_{ij}$ et il nous reste à calculer les termes $\mathcal{L}_X \partial_i$. On rappelle pour cela que l'expression en coordonnées locales du crochet de Lie de deux champs de vecteurs s'écrit

$$[X, Y]^k = X^l \partial_l Y^k - Y^l \partial_l X^k.$$

On a donc

$$(\mathcal{L}_X \partial_i)^k = [X, \partial_i]^k = -\partial_i X^k,$$

et on obtient finalement

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = X^k \partial_k q_{ij} + q_{kj} \partial_i X^k + q_{il} \partial_j X^l.$$

2. Passons maintenant au cas particulier où les (x^i) sont des coordonnées linéaires de $\mathbb{R}^3$ (ce qui n'a pas de sens sur une variété quelconque). Dans ce cas, $q_{ij} = \mathbf{q}(\partial_i, \partial_j) = \mathbf{q}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ est une fonction constante et $\partial_k q_{ij} = 0$. On a donc

$$(a) \quad (\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = q_{kj} \partial_i X^k + q_{il} \partial_j X^l.$$

Si de plus le système de coordonnées (x^i) est orthonormé, alors $q_{ij} = \delta_{ij}$ et

$$(b) \quad (\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = \partial_i X^j + \partial_j X^i.$$

3. On a alors (en coordonnées orthonormées)

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q})_{ij} = \partial_j u^i + \partial_i u^j = u^i_{,j} + u^j_{,i} = 2d_{ij},$$

où

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q}$$

est la définition la plus intrinsèque du *taux de déformation* $\mathbf{d} = (d_{ij})$ (comme champ de tenseurs covariants). Elle ne nécessite pas l'introduction d'une structure supplémentaire, comme une dérivée covariante.

Exercice 17 Formule magique

La dérivée de Lie peut être étendue aux champs de vecteurs dépendant du temps en posant

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{T} := \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} (\varphi_t^\tau)^* \mathbf{T}.$$

Étant donné un chemin de plongement $p(t) : \mathcal{B} \rightarrow M$, on définit sa vitesse eulerienne comme le champ de vecteur dépendant du temps et défini sur M par

$$\mathbf{u}(t) := \partial_t p \circ p(t)^{-1}$$

1. Soit φ_s^t le flot de $\mathbf{u}(t)$. Montrer que $p(t) = \varphi_s^t \circ p(s)$.
2. Soit $\mathbf{T}(t)$ un champ de tenseur dépendant du temps et défini sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathcal{B})$. En déduire que

$$\partial_t(p(t)^* \mathbf{T}(t)) = p(t)^* (\partial_t \mathbf{T} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{T}(t)).$$

3. Relier le tenseur de Cauchy-Green droit $\mathbf{C} = \varphi^* \mathbf{q}$ (défini sur la configuration de référence $\Omega_0 = \varphi^{-1}(\Omega)$ de la Mécanique des Milieux Continus) au taux de déformation $\mathbf{d}$ de la Mécanique des Milieux Continus (défini sur la configuration déformée $\Omega = \varphi(\Omega_0)$).

Solution de l'exercice 17

1. Posons $\phi_s^t := p(t) \circ p(s)^{-1}$. Alors on a

$$\partial_t \phi_s^t(\mathbf{x}) = \partial_t p(t, p(s)^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{u}(t, p(t)(p(s)^{-1}(\mathbf{x}))) = \mathbf{u}(t, \phi_s^t(\mathbf{x}))$$

et $\phi_s^s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Par unicité du flot, on a donc $\phi_s^t = \varphi_s^t$.

2. On a

$$\begin{aligned} \partial_t(p(t)^* \mathbf{T}(t)) &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} p(\tau)^* \mathbf{T}(\tau) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} (\varphi(\tau, t) \circ p(t))^* \mathbf{T}(\tau) \\ &= p(t)^* \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} \varphi(\tau, t)^* \mathbf{T}(\tau) \\ &= p(t)^* (\partial_t \mathbf{T}(t) + \mathcal{L}_{\mathbf{u}(t)} \mathbf{T}(t)). \end{aligned}$$

3. La "formule magique"

$$\varphi^*(\partial_t \mathbf{k} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{k}) = \partial_t(\varphi^* \mathbf{k})$$

permet de faire le lien direct avec la variable de déformation $\mathbf{C} = \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{q} \mathbf{F}^t \mathbf{F}$ en grandes déformations (qui est le pullback de la métrique euclidienne sur la configuration de référence par la transformation φ). En effet, la métrique $\mathbf{q}$ étant constante sur $\mathbb{R}^3$, on a

$$\varphi^* \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q} = \varphi^*(\partial_t \mathbf{q} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \mathbf{q}) = \partial_t(\varphi^* \mathbf{q}) = \partial_t \mathbf{C},$$

ce qui donne

$$\varphi^* \mathbf{d} = \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{C}.$$

1.4 Différentielle extérieure – Théorème de Stokes

- Le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs X, Y est défini par

$$[X, Y] := \mathcal{L}_X Y,$$

et a pour composantes dans tout système de coordonnées locales (x^i) :

$$[X, Y]^j = X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j. \quad (6)$$

- La *dérivée extérieure* est une application linéaire

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

qui étend la différentielle d'une fonction (une 0-forme) à une forme différentielle de degré k quelconque. Elle est définie récursivement (sur le degré) par la *formule de Cartan*

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Sa propriété principale est le fait que

$$d \circ d = 0.$$

Exercice 18 Dérivée extérieure d'une forme de degré 1 ou 2

1. En utilisant la formule de Cartan, montrer que la différentielle extérieure d'une 1-forme α s'écrit :

$$(d\alpha)(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

et en déduire son expression en composantes $(d\alpha)_{ij}$.

2. En utilisant la formule de Cartan, montrer que la différentielle extérieure d'une 2-forme ω s'écrit :

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) + \omega(X, [Y, Z]) + \mathcal{L}_Y(\omega(Z, X)) + \omega(Y, [Z, X]) \\ &\quad + \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) + \omega(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

et en déduire son expression en composantes $(d\omega)_{ijk}$.

On observe à nouveau que l'expression de la dérivée de Lie d'une forme se réduit à la connaissance de la dérivée de Lie d'une fonction et de celle d'un champ de vecteurs (i.e., du crochet de Lie).

Solution de l'exercice 18

1. $\mathcal{L}_X \alpha$ est une 1-forme comme α . En évaluant la formule de Cartan sur Y on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \alpha)(Y) &= d(\alpha(X)).Y + (d\alpha)(X, Y) \\ &= \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) + (d\alpha)(X, Y). \end{aligned}$$

Or, par Leibniz,

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]).$$

Au final :

$$(d\alpha)(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Soit (x^i) , un système de coordonnées locales. On rappelle que $\mathcal{L}_{\partial_i} f = \partial_i f$. On a donc

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{ij} &= (d\alpha)(\partial_i, \partial_j) \\ &= \mathcal{L}_{\partial_i}(\alpha_j) - \mathcal{L}_{\partial_j}(\alpha_i) - \alpha([\partial_i, \partial_j]) \\ &= \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i, \end{aligned}$$

car $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

2. $\mathcal{L}_X \omega$ est une 2-forme comme ω . En évaluant la formule de Cartan sur (Y, Z) on a

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y, Z) = (di_X \omega)(Y, Z) + d\omega(X, Y, Z).$$

Or, d'une part, $i_X \omega$ est une 1-forme et sa dérivée extérieure s'écrit donc (Question 1)

$$\begin{aligned} (di_X \omega)(Y, Z) &= \mathcal{L}_Y(i_X \omega(Z)) - \mathcal{L}_Z(i_X \omega(Y)) - (i_X \omega)([Y, Z]) \\ &= \mathcal{L}_Y(\omega(X, Z)) - \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) - \omega(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

D'autre part, la formule de Leibniz nous donne

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)(Y, Z) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \omega(\mathcal{L}_X Y, Z) - \omega(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Y, [X, Z]). \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= (\mathcal{L}_X \omega)(Y, Z) - (di_X \omega)(Y, Z) \\ &= \{\mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Y, [X, Z])\} \\ &\quad - \{\mathcal{L}_Y(\omega(X, Z)) - \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) - \omega(X, [Y, Z])\} \\ &= \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) + \omega(X, [Y, Z]) \\ &\quad + \mathcal{L}_Y(\omega(Z, X)) + \omega(Y, [Z, X]) \\ &\quad + \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) + \omega(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Autrement dit, $d\omega(X, Y, Z)$ est la somme des permutations circulaires de l'expression

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) + \omega(X, [Y, Z]).$$

On en déduit que

$$(d\omega)_{ijk} = d\omega(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij}.$$

Exercice 19 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme volume sur une variété M de dimension n . On définit la divergence $\text{div}^\omega X$ d'un champ de vecteurs X sur M par

$$\mathcal{L}_X \omega = (\text{div}^\omega X) \omega.$$

1. Pourquoi $\mathcal{L}_X \omega$ est proportionnelle à ω ?
2. Montrer que si $M = \mathbb{R}^3$ et ω est le déterminant $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\text{div}^\omega X$ correspond à la "divergence ordinaire"

$$\text{div} X = \partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3,$$

d'un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 19

1. L'espace des tenseurs covariants alternés de degré n , $\Lambda^n E^*$, sur un espace vectoriel E de dimension n est de dimension 1. Une forme volume ω sur une variété de dimension n définit donc une base ω_m de $\Lambda^n T_m^* M$ en tout point $m \in M$ (puisque ω ne s'annule pas). Par conséquent la forme de degré n , $\mathcal{L}_X \omega$, est proportionnelle à ω . On a donc

$$\mathcal{L}_X \omega = f\omega, \quad f \in C^\infty(M).$$

2. Soit (x^i) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^3$. On a

$$(\mathcal{L}_X \omega)(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\operatorname{div}^\omega X)\omega(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \operatorname{div}^\omega X.$$

Par la règle de Leibniz, on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\omega X &= (\mathcal{L}_X \omega)(\partial_1, \partial_2, \partial_3) \\ &= \mathcal{L}_X(\omega(\partial_1, \partial_2, \partial_3)) - \omega(\mathcal{L}_X \partial_1, \partial_2, \partial_3) - \omega(\partial_1, \mathcal{L}_X \partial_2, \partial_3) - \omega(\partial_1, \partial_2, \mathcal{L}_X \partial_3) \\ &= -\omega([X, \partial_1], \partial_2, \partial_3) - \omega(\partial_1, [X, \partial_2], \partial_3) - \omega(\partial_1, \partial_2, [X, \partial_3]), \end{aligned}$$

car $\mathcal{L}_X(\omega(\partial_1, \partial_2, \partial_3)) = \mathcal{L}_X 1 = 0$. Or $[X, \partial_i] = [X, \partial_i]^j \partial_j = -(\partial_i X^j) \partial_j$, par (6). D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\omega X &= \omega((\partial_1 X^j) \partial_j, \partial_2, \partial_3) + \omega(\partial_1, (\partial_2 X^j) \partial_j, \partial_3) + \omega(\partial_1, \partial_2, (\partial_3 X^j) \partial_j) \\ &= \omega((\partial_1 X^1) \partial_1, \partial_2, \partial_3) + \omega(\partial_1, (\partial_2 X^2) \partial_2, \partial_3) + \omega(\partial_1, \partial_2, (\partial_3 X^3) \partial_3) \\ &= \partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à nouveau la propriété $\omega(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = 1$.

Exercice 20 Conservation de la masse

On rappelle que le body $\mathcal{B}$ est muni d'une forme volume μ , la mesure de masse. A chaque plongement p correspond donc une forme volume $p_* \mu$ sur la configuration $\Omega_p = p(\mathcal{B})$ qui est donc proportionnelle à la forme volume $\operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (dans tout système de coordonnées orthonormales direct (x^1, x^2, x^3) définie sur l'espace). Ceci permet de définir la **densité de masse** ρ comme une fonction scalaire sur le domaine spatial Ω_p par

$$p_* \mu = \rho \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}.$$

1. On considère une configuration de référence $p_0 : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_0$ et une configuration actuelle $p : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_p$. On introduit la transformation $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_p$, définie par $\varphi := p \circ p_0^{-1}$. Montrer que

$$\rho_0 = (\varphi^* \rho) J_\varphi = (\rho \circ \varphi) J_\varphi.$$

(Rappel : le Jacobien J_φ est défini implicitement par l'équation $\varphi^* \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = J_\varphi \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$, où $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$, $(p \circ p_0^{-1})^* = (p_0^{-1})^* p^*$ et $(p_0^{-1})^* = (p_0^*)^{-1} = p_{0*}$).

2. En déduire la **version dynamique de la conservation de la masse**

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \dot{\rho} := \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho,$$

si $\varphi(t)$ est un chemin de plongements. On pourra faire appel à la « formule magique » :

$$\partial_t \varphi^* \omega = \varphi^* (\partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega).$$

Solution de l'exercice 20

1. On a $\mu = p_0^*(\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}}) = p^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}})$, d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}} &= (p_0^*)^{-1} p^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= (p_0^{-1})^* p^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= (p \circ p_0^{-1})^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= \varphi^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= (\rho \circ \varphi) J_{\varphi} \text{vol}_{\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_0 = (\rho \circ \varphi) J_{\varphi}.$$

2. Considérons un chemin de plongements $\varphi(t)$ et dérivons l'équation obtenue à la question précédente. On obtient :

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t(\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= \partial_t[\varphi^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}})] \\ &= \varphi^*[\partial_t(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) + \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}})],\end{aligned}$$

ce qui nous donne (φ étant inversible) :

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) + \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) \\ &= (\partial_t \rho) \text{vol}_{\mathbf{q}} + (\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \rho) \text{vol}_{\mathbf{q}} + (\rho \text{div } \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\partial_t \rho + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \rho + \rho \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

soit

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Exercice 21 Lois de conservations intégrales

Soit $\Omega = p(\mathcal{B})$ la configuration actuelle (plongée par p dans l'espace euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$) et

$$\mathbf{V} := \partial_t p, \quad \mathbf{u} = \mathbf{V} \circ p^{-1}$$

les vitesses lagrangienne et eulerienne.

1. Etablir, à l'aide de la formule magique, la relation suivante,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} \partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega,$$

valable pour toute 3-forme alternée ω définie sur Ω .

2. Soit f une fonction. Montrer, en utilisant la question 1, que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} (\dot{f} + f \text{div } \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}} \quad \text{où} \quad \dot{f} := \partial_t f + \nabla_{\mathbf{u}} f.$$

où pour une fonction $\nabla_{\mathbf{u}} f := \text{d}f \cdot \mathbf{u}$.

3. Soit f une fonction et ρ la masse volumique. Montrer, à l'aide de la conservation de la masse, que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho f \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega} \rho \dot{f} \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Solution de l'exercice 21

1. C'est une application directe du changement de variables dans les intégrales

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} p^* \omega \\
&= \int_{\mathcal{B}} \partial_t p^* \omega \\
&= \int_{\mathcal{B}} p^* (\partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega) \\
&= \int_{\Omega} (\partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega)
\end{aligned}$$

2. On pose $\omega = f \text{vol}_{\mathbf{q}}$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \omega + \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \omega &= (\partial_t f) \text{vol}_{\mathbf{q}} + (\mathcal{L}_{\mathbf{u}} f) \text{vol}_{\mathbf{q}} + f \mathcal{L}_{\mathbf{u}} \text{vol}_{\mathbf{q}} \\
&= (\partial_t f) \text{vol}_{\mathbf{q}} + (\nabla_{\mathbf{u}} f) \text{vol}_{\mathbf{q}} + f \text{div } \mathbf{u} \text{vol}_{\mathbf{q}} \\
&= (\partial_t f + \nabla_{\mathbf{u}} f + f \text{div } \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}}. \\
&= (\dot{f} + f \text{div } \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

3. On applique le résultat de la question 1 à la fonction ρf ($\omega = \rho f \text{vol}_{\mathbf{q}}$),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho f \text{vol}_{\mathbf{q}} &= \int_{\Omega} (\partial_t(\rho f) + \nabla_{\mathbf{u}}(\rho f) + \rho f \text{div } \mathbf{u}) \text{vol}_{\mathbf{q}} \\
&= \int_{\Omega} (\rho \dot{f} + f(\dot{\rho} + \rho \text{div } \mathbf{u})) \text{vol}_{\mathbf{q}} \\
&= \int_{\Omega} \rho \dot{f} \text{vol}_{\mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Exercice 22 Rotationnel d'un champ de vecteurs

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique et on note $\text{vol}_{\mathbf{q}}$, le volume Riemannien correspondant. Soit $\mathbf{A}$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer, dans les coordonnées canoniques (x^i) , les composantes de $d\mathbf{A}^{\flat}$.
2. Montrer que

$$d\mathbf{A}^{\flat} = i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Solution de l'exercice 22

1. Pour la métrique euclidienne $\mathbf{q} = (\delta_{ij})$ dans les coordonnées canoniques (x^i) , on a $\mathbf{A}^{\flat} = A_i dx^i$ avec $A_i = \delta_{ij} A^j = A^i$. On déduit alors de la question 1 de l'exercice 1 que

$$(dA^{\flat})_{ij} = \partial_i A^j - \partial_j A^i.$$

2. La 2-forme $i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}} = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \cdot, \cdot)$ a pour composantes

$$(i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})_{ij} = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \partial_i, \partial_j)$$

Or

$$\text{rot } \mathbf{A} = (\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2) \partial_1 + (\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3) \partial_2 + (\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1) \partial_3$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
(i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})_{12} &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \partial_1, \partial_2) = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1, \\
(i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})_{13} &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \partial_1, \partial_3) = -(\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3), \\
(i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})_{23} &= \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \partial_2, \partial_3) = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2,
\end{aligned}$$

et donc $(d\mathbf{A}^{\flat})_{ij} = (i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})_{ij}$.

Theorem 6 (Théorème de Stokes). *Soit M une variété différentielle orientée de dimension n , et ω une $(n-1)$ -forme différentielle à support compact sur M de classe C^∞ . Alors, on a :*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$$

où d désigne la dérivée extérieure, ∂M le bord de M (éventuellement vide), muni de l'orientation sortante, $i : \partial M \rightarrow M$ est l'injection canonique et i^ est la restriction de M à ∂M .*

Exercice 23 Formule de Green-Ostrogradski

Soit $\mathbf{q}$ la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Soit Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$ de bord $\partial\Omega$ de normale unitaire $\mathbf{n}$, et X un champ de vecteurs défini sur Ω . Montrer que la formule de Green-Ostrogradski

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X) \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\partial\Omega} (X \cdot \mathbf{n}) da, \quad da := i_{\mathbf{n}} \operatorname{vol}_{\mathbf{q}},$$

est un cas particulier du théorème de Stokes lorsque $\omega = i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$.

Solution de l'exercice 23

On écrit le théorème de Stokes pour la 2-forme $\omega = i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$, définie sur Ω , de sorte que

$$d\omega = d i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \mathcal{L}_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} - i_X d\operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = (\operatorname{div} X) \operatorname{vol}_{\mathbf{q}},$$

car $d\operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = 0$. Par ailleurs, $i^*(i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}})$ désigne simplement la restriction de la 2-forme $i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$ à $\partial\Omega$. En un point $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, soit (ξ_1, ξ_2) , une base de $T_{\mathbf{x}}\partial\Omega$. On a

$$\begin{aligned} (i^*(i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}))(\xi_1, \xi_2) &= \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}(X, \xi_1, \xi_2) = \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}((X \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + X^\top, \xi_1, \xi_2) \\ &= \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}((X \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \xi_1, \xi_2) = (X \cdot \mathbf{n}) (i_{\mathbf{n}} \operatorname{vol}_{\mathbf{q}})(\xi_1, \xi_2) = (X \cdot \mathbf{n}) da(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

On en déduit que $i^*(i_X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}) = (X \cdot \mathbf{n}) da$ et on retrouve bien la formule

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\Omega} (\operatorname{div} X) \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\partial\Omega} i^* \omega = \int_{\partial\Omega} (X \cdot \mathbf{n}) da.$$

Exercice 24 Formule de Stokes-Ampère

Soit Σ une surface orientée (par le choix d'une normale unitaire $\mathbf{n}$) de l'espace euclidien orienté $(\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$, de contour $\partial\Sigma$. Soit $X = \mathbf{A}$ un champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que la formule de Stokes-Ampère

$$\int_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) da = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\ell \tag{7}$$

est un cas particulier du théorème de Stokes lorsque $\omega = j^* \mathbf{A}^\flat \in \Omega^1(\Sigma)$, où $j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'injection canonique et $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à $\partial\Sigma$, tel que $d\ell(\boldsymbol{\tau}) = 1$.

Solution de l'exercice 24

Soit $i : \partial\Sigma \rightarrow \Sigma$ l'injection canonique. La restriction $i^* \omega$ de la 1-forme ω au contour $\partial\Sigma$ (de dimension 1) s'écrit

$$i^* \omega = f d\ell$$

où $d\ell \in \Omega^1(\partial\Sigma)$ est la forme volume telle que $d\ell(\boldsymbol{\tau}) = 1$ pour tout vecteur tangent unitaire au contour. On a donc

$$f = (i^* \omega)(\boldsymbol{\tau}) = (i^* j^* \mathbf{A}^\flat)(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{A}^\flat(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

De plus, sur Σ (de normale unitaire $\mathbf{n}$), on a

$$\begin{aligned} d\omega &= dj^* \mathbf{A}^b = j^* d\mathbf{A}^b = j^* i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= i_{(\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}} \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) i_{\mathbf{n}} \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) da, \end{aligned}$$

car

$$(j^* i_{\text{rot } \mathbf{A}} \text{vol}_{\mathbf{q}})(\xi_1, \xi_2) = \text{vol}_{\mathbf{q}}(\text{rot } \mathbf{A}, \xi_1, \xi_2) = \text{vol}_{\mathbf{q}}((\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \xi_1, \xi_2).$$

pour tous vecteurs ξ_1, ξ_2 tangents à Σ . Par le théorème de Stokes :

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) da = \int_{\partial \Sigma} i^* \omega = \int_{\partial \Sigma} (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\ell.$$

1.5 Groupes et algèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On rappelle les opérations suivantes.

1. La conjugaison

$$I_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

2. La représentation adjointe Ad de G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

$$\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}) \subset \text{End}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \text{Ad}_g = T_e I_g,$$

telle que $\text{Ad}_g v = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I_g h(s)$, avec $h(0) = e$ et $\dot{h}(0) = v \in \mathfrak{g}$.

3. La représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad u \mapsto \text{ad}_u = T_e \text{Ad} .u,$$

telle que $\text{ad}_u v = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{g(s)} v$, avec $g(0) = e$ et $\dot{g}(0) = u \in \mathfrak{g}$.

Le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est défini par

$$[u, v]_{\mathfrak{g}} := \text{ad}_u v.$$

Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, il est simplement noté $[u, v]$. Il satisfait les propriétés suivantes

- (1) $[v, u] = -[u, v]$,
- (2) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (identité de Jacobi).

Exercice 25 Le groupe des rotations $\text{SO}(n)$

On note $G = \text{SO}(n)$ le groupe des rotations en n dimensions, défini par $gg^t = I$.

1. A quoi correspond l'espace tangent à l'élément neutre (noté I) du groupe ?
2. Détailler la conjugaison, puis les représentations adjointes Ad et ad .
3. En déduire l'expression explicite du crochet de Lie sur $\mathfrak{so}(n)$.

Solution de l'exercice 25

1. C'est par définition l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ du groupe des rotations. Tout élément de $\mathfrak{so}(n) = T_I \text{SO}(n)$ s'écrit

$$\mathbf{u} := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g(s) = \dot{g}(0)$$

et vérifie

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (g(s)g(s)^t) = 0 = \dot{g}(0) + \dot{g}(0)^t = \mathbf{u} + \mathbf{u}^t.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétrique.

2. Conjugaison : $I_g h = g \cdot h \cdot g^{-1}$ (où $\cdot$ désigne le produit matriciel). Puis

$$\text{Ad}_g \mathbf{v} = T_I I_g \cdot \mathbf{v} = g \cdot \mathbf{v} \cdot g^{-1}, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{so}(n).$$

Enfin,

$$\text{ad}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (g(s) \cdot \mathbf{v} \cdot g(s)^{-1}), \quad \text{avec } g(0) = I \quad \text{et} \quad \dot{g}(0) = \mathbf{u} \in \mathfrak{so}(n),$$

soit

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\mathfrak{so}(n)} &= \text{ad}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \dot{g}(0) \cdot \mathbf{v} \cdot g^{-1}(0) - g(0) \cdot \mathbf{v} \cdot g(0)^{-1} \cdot \dot{g}(0) \cdot g(0)^{-1} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \end{aligned}$$

qui n'est ici rien d'autre que le commutateur des matrices (antisymétriques) $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Exercice 26 Formule d'Olinde-Rodrigues

Soit $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et

$$j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad \mathbf{n} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -n^3 & n^2 \\ n^3 & 0 & -n^1 \\ -n^2 & n^1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Établir la formule d'Olinde-Rodrigues

$$R(\mathbf{n}, \theta) := \exp(\theta j(\mathbf{n})) = \text{id} + (\sin \theta) j(\mathbf{n}) + (1 - \cos \theta) j(\mathbf{n})^2.$$

2. Que vaut $R(-\mathbf{n}, \theta)$?

Solution de l'exercice 26

1. On a

$$j(\mathbf{n})^2 = \begin{pmatrix} -n_2^2 - n_3^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix}.$$

et, en particulier, $\text{tr}(j(\mathbf{n})^2) = -2 \|\mathbf{n}\|^2$. Par le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice 3×3 , A , on a

$$A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 \text{id} = 0 \quad \begin{cases} I_1 = \text{tr } A, \\ I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr } A)^2 - \text{tr } A^2), \\ I_3 = \det A. \end{cases}$$

Pour $A = j(\mathbf{n})$, qui est antisymétrique, on a

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(A^2) = \|\mathbf{n}\|^2 = 1, \quad I_3 = 0$$

et donc

$$j(\mathbf{n})^3 = -j(\mathbf{n}),$$

d'où

$$j(\mathbf{n})^{2k+1} = (-1)^k j(\mathbf{n}) \quad (k \geq 0), \quad j(\mathbf{n})^{2k} = (-1)^{k+1} j(\mathbf{n})^2 \quad (k \geq 1).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \exp(\theta j(\mathbf{n})) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta j(\mathbf{n}))^k}{k!} \\ &= \text{id} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} j(\mathbf{n})^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} j(\mathbf{n})^{2k+1} \\ &= \text{id} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \theta^{2k}}{(2k)!} \right) j(\mathbf{n})^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) j(\mathbf{n}) \\ &= \text{id} + \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \right) j(\mathbf{n})^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) j(\mathbf{n}) \\ &= \text{id} + (1 - \cos \theta) j(\mathbf{n})^2 + (\sin \theta) j(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

2. On a $j(-\mathbf{n}) = -j(\mathbf{n})$ et donc $R(-\mathbf{n}, \theta) = R(\mathbf{n}, -\theta)$.

Exercice 27 Le groupe des déplacements euclidiens SE(3)

SE(3) est le groupe des déplacements euclidiens en dimension 3. Il possède la représentation matricielle suivante

$$g = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q \in \text{SO}(3), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3,$$

lorsque $\mathbb{R}^3$ est identifié au sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ des points $(x, y, z, 1)$. Dans ce cas, l'action de SE(3) sur un point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} Q & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\mathbf{x} + \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. D'un point de vue ensembliste, SE(3) s'écrit $\text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$. Écrire le produit de groupe

$$(Q_1, \mathbf{a}_1) * (Q_2, \mathbf{a}_2).$$

Expliciter l'élément neutre du groupe et l'inverse d'un élément $(Q, \mathbf{a})$.

2. Détailler la conjugaison, puis les représentations adjointes Ad et ad.

3. En déduire l'expression explicite du crochet de Lie sur $\mathfrak{se}(3)$.

Solution de l'exercice 27

1. On a

$$\begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{a}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 & \mathbf{a}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 Q_2 & \mathbf{a}_1 + Q_1 \mathbf{a}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$(Q_1, \mathbf{a}_1) * (Q_2, \mathbf{a}_2) = (Q_1 Q_2, \mathbf{a}_1 + Q_1 \mathbf{a}_2).$$

En particulier, l'élément neutre est $e = (\text{Id}, 0)$, qui correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(Q, \mathbf{a})^{-1} = (Q^{-1}, -Q^{-1} \mathbf{a}),$$

qui correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} Q & \mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1}\mathbf{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $g = (Q, \mathbf{a})$ et $h = (R, \mathbf{b})$. La conjugaison $I_g h = ghg^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} I_g h &= (Q, \mathbf{a}) * (R, \mathbf{b}) * (Q^{-1}, -Q^{-1}\mathbf{a}) \\ &= (QR, \mathbf{a} + Q\mathbf{b}) * (Q^{-1}, -Q^{-1}\mathbf{a}) \\ &= (QRQ^{-1}, \mathbf{a} + Q\mathbf{b} - QRQ^{-1}\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Soit $h(s) = (R(s), \mathbf{b}(s))$ tel que

$$h(0) = e = (\mathbf{Id}, 0) \quad \text{et} \quad \dot{h}(0) = v = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}).$$

avec $\mathbf{v} \in \mathfrak{so}(3)$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g v &= T_e I_g . v = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I_g h(s) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (QR(s)Q^{-1}, \mathbf{a} + Q\mathbf{b}(s) - QR(s)Q^{-1}\mathbf{a}) \\ &= (Q\mathbf{v}Q^{-1}, Q\boldsymbol{\beta} - Q\mathbf{v}Q^{-1}\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Soit $g(s) = (Q(s), \mathbf{a}(s))$ tel que

$$g(0) = e = (\mathbf{Id}, 0) \quad \text{et} \quad \dot{g}(0) = u = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}),$$

avec $\mathbf{u} \in \mathfrak{so}(3)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \text{ad}_u v &= (T_e \text{Ad} . u)v = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{g(s)} v \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (Q(s)\mathbf{v}Q(s)^{-1}, Q(s)\boldsymbol{\beta} - Q(s)\mathbf{v}Q(s)^{-1}\mathbf{a}(s)) \\ &= (\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}, \mathbf{u}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= ([\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\mathfrak{so}(3)}, \mathbf{u}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

car

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} Q(s)^{-1} = -Q(0)^{-1} \frac{dQ(0)}{ds} Q(0)^{-1}.$$

3. On a $\mathfrak{se}(3) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3$ et

$$[u, v]_{\mathfrak{se}(3)} = [(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta})]_{\mathfrak{se}(3)} = \text{ad}_u v = ([\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\mathfrak{so}(3)}, \mathbf{u}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}).$$

Exercice 28 Le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$

$\text{Diff}(M)$ est le groupe des difféomorphismes d'une variété différentielle M . Si M est compacte, on peut munir $\text{Diff}(M)$ d'une structure de variété de Fréchet qui en fait un groupe de Lie de dimension infinie.

1. Rappeler l'opération qui fait de $\text{Diff}(M)$ un groupe ? Expliciter l'élément neutre du groupe et l'inverse d'un élément φ .
2. A quoi correspond l'espace tangent à l'élément neutre du groupe ?

3. Détailler la conjugaison. Montrer que les représentations adjointes Ad et ad ont pour expressions

$$\text{Ad}_\varphi Y = \varphi_* Y, \quad \text{ad}_X Y = -\mathcal{L}_X Y, \quad (8)$$

où $\varphi \in \text{Diff}(M)$ et $X, Y \in \text{Vect}(M)$.

4. En déduire l'expression explicite du crochet de Lie sur $T_e \text{Diff}(M)$.

Solution de l'exercice 28

1. L'opération de groupe est la composition $\varphi \circ \psi$ entre deux difféomorphismes $\varphi, \psi \in \text{Diff}(M)$. L'élément neutre e est le difféomorphisme identité id (tel que $e(m) = \text{id}(m) = m, \forall m \in M$).
2. Un élément de $T_{\text{id}} \text{Diff}(M)$ s'écrit

$$X := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \psi(s) = \dot{\psi}(0)$$

où $\psi(s)$ est un chemin dans $\text{Diff}(M)$. En tout point $m \in M$ on a plus précisément

$$X(m) = (\partial_s \psi)(0, m) \in T_m M,$$

car $\psi(0, m) = m$. On a donc $X \in \text{Vect}(M)$ et $\text{Lie}(\text{Diff}(M)) \subset \text{Vect}(M)$.

Si la variété M est compacte, *tout champ de vecteurs est complet* (i.e., son flot $\psi(s, m)$ est défini pour tout temps) et donc $\psi(s, m)$ est défini globalement sur M pour tout s . Par conséquent, pour tout champ de vecteurs X , il existe un chemin $\psi(s, m)$ dans $\text{Diff}(M)$ tel que $\dot{\psi}(0) = X$. On a donc l'égalité

$$\text{Lie}(\text{Diff}(M)) = \text{Vect}(M).$$

Si M n'est pas compacte, on peut seulement conclure que $\text{Lie}(\text{Diff}(M)) \subset \text{Vect}(M)$.

3. Pour $G = \text{Diff}(M)$:

— Conjugaison

$$I_\varphi : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(M), \quad \psi \mapsto \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}.$$

— Représentation adjointe Ad de $\text{Diff}(M)$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

$$\text{Ad}_\varphi Y = T_e I_\varphi . Y = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi \circ \psi(s) \circ \varphi^{-1} \quad \text{avec} \quad \psi(0) = \text{id}, \dot{\psi}(0) = Y \in \text{Vect}(M),$$

soit

$$(\text{Ad}_\varphi Y)_m = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \varphi(\psi(s, \varphi^{-1}(m))) = T_{\varphi^{-1}(m)} \varphi . Y(\varphi^{-1}(m)),$$

de sorte que

$$\text{Ad}_\varphi Y = \varphi_* Y.$$

— Représentation adjointe ad de $\mathfrak{g} = \text{Vect}(M)$ sur $\mathfrak{g}$, telle que

$$\text{ad}_X Y = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{\varphi(s)} Y, \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \text{id}, \text{ et } \dot{\varphi}(0) = X.$$

Soit :

$$\text{ad}_X Y = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(s)_* Y = - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(s)^* Y = -\mathcal{L}_X Y.$$

4. On a donc

$$[X, Y]_{\text{Lie}(\text{Diff}(M))} = \text{ad}_X Y = -[X, Y]_{\text{Vect}(M)},$$

égal à l'opposé du crochet de Lie des champs de vecteurs X, Y .

On rappelle qu'une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est la donnée d'une application

$$\Psi : G \times M \rightarrow M,$$

telle que

$$\Psi(e, m) = m, \quad \Psi(g_1 g_2, m) = \Psi(g_1, \Psi(g_2, m)), \quad (9)$$

pour tout $m \in M$ et $g_1, g_2 \in G$. Autrement dit, Ψ correspond à un morphisme de groupe

$$\widetilde{\Psi} : G \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto \widetilde{\Psi}(g) := \Psi(g, \cdot).$$

qu'on notera encore Ψ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. La propriété (9) se réécrit alors

$$\Psi(e) = e \quad \Psi(g_1 g_2) = \Psi(g_1) \circ \Psi(g_2),$$

A toute action (lisse) Ψ correspond une action infinitésimale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G définie par

$$X_u = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(g(s)), \quad u \in \mathfrak{g},$$

soit

$$X_u(m) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(g(s), m), \quad u \in \mathfrak{g}, m \in M,$$

où $g(s)$ est une courbe dans G telle que $g(0) = e$ et $\dot{g}(0) = u$. Cette action infinitésimale correspond à l'application linéaire tangente

$$T_e \widetilde{\Psi} : T_e G = \mathfrak{g} \rightarrow T_{\text{id}} \text{Diff}(M) = \text{Vect}(M), \quad u \mapsto X_u.$$

Exercice 29 Action de G sur M

Soit Ψ une action d'un groupe de Lie G sur une variété différentielle M .

1. Montrer que

$$\Psi(I_g h) = I_{\Psi(g)} \Psi(h)$$

2. En déduire que $X_{\text{Ad}_g u} = \Psi(g)_* X_u$.

3. On admet que l'application $u \mapsto X_u = T_e \Psi \cdot u$ de $\mathfrak{g}$ dans $\text{Vect}(M)$ est linéaire continue. Conclure que $X_{[u,v]_{\mathfrak{g}}} = -[X_u, X_v]_{\text{Vect}(M)}$.

Solution de l'exercice 29

1. Ψ étant un morphisme de groupe, on a

$$\Psi(I_g h) = \Psi(ghg^{-1}) = \Psi(g) \circ \Psi(h) \circ \Psi(g)^{-1} = I_{\Psi(g)} \Psi(h).$$

2. Soit $h(s)$ un chemin dans G tel que $h(0) = e$ et $\dot{h}(0) = u \in \mathfrak{g}$. Alors, $k(s) := I_g h(s) = gh(s)g^{-1}$ est un chemin sur G tel que $k(0) = e$ et $\dot{k}(0) = \text{Ad}_g u$, et donc

$$X_{\text{Ad}_g u} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(k(s)).$$

Or $\Psi(k(s)) = \Psi(I_g h(s)) = I_{\Psi(g)} \Psi(h(s))$ par la question 1. Par suite,

$$X_{\text{Ad}_g u} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(k(s)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I_{\Psi(g)} \Psi(h(s)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(g) \circ \Psi(h(s)) \circ \Psi(g)^{-1} = \Psi(g)_* X_u,$$

où l'on a utilisé l'équation (8) de l'exercice 3.

3. Soit $g(s)$ un chemin dans G tel que $g(0) = e$ et $\dot{g}(0) = u \in \mathfrak{g}$. Alors

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} X_{\text{Ad}_{g(s)} v} &= X_{\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}_{g(s)} v} = X_{\text{ad}_u v} = X_{[u, v]_{\mathfrak{g}}} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Psi(g(s)))_* X_v = -[X_u, X_v]_{\text{Vect}(M)}. \end{aligned}$$

Exercice 30 Formes de Maurer-Cartan

Soit G un groupe de Lie de dimension n . On définit les formes de Maurer-Cartan à gauche et à droite par

$$\omega^L(\xi_g) := T_g L_{g^{-1}} \cdot \xi_g, \quad \omega^R(\xi_g) := T_g R_{g^{-1}} \cdot \xi_g, \quad \xi_g \in T_g G,$$

qui sont des 1-formes à valeurs vectorielles dans $\mathfrak{g}$. En choisissant une base $(\mathbf{e}_i)$ de $\mathfrak{g}$ on peut se ramener à n 1-formes différentielles ω^i à valeurs scalaires en posant $\omega = \omega^i \mathbf{e}_i$.

1. Que valent $\omega^L(X_u^L)$ et $\omega^R(X_v^R)$ si X_u^L et X_v^R sont respectivement des champs invariants à gauche et à droite.
2. Montrer que ω^L est invariante à gauche (*i.e.* que $L_h^* \omega^L = \omega^L, \forall h \in G$) et que ω^R est invariante à droite (*i.e.* que $R_h^* \omega^R = \omega^R, \forall h \in G$).
3. Montrer que $R_h^* \omega^L = \text{Ad}_{h^{-1}} \omega^L$ et $L_h^* \omega^R = \text{Ad}_h \omega^R$.
4. On étend le produit intérieur entre deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(G, \mathfrak{g})$ et $\beta \in \Omega^q(G, \mathfrak{g})$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ en posant

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(\sigma) [\alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}), \beta(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)})].$$

En calculant avec des champs invariants à gauche (resp. à droite), montrer que

$$d\omega^L = -\frac{1}{2} \omega^L \wedge \omega^L, \quad \text{et} \quad d\omega^R = \frac{1}{2} \omega^R \wedge \omega^R$$

Solution de l'exercice 30

1. On a

$$\omega_g^L(X_u^L(g)) = T_g L_{g^{-1}} \cdot X_u^L(g) = T_g L_{g^{-1}} \cdot T_e L_g \cdot u = u.$$

On trouve de même que $\omega_v^R(X_v^R) = v$.

2. On a

$$\begin{aligned} (L_h^* \omega^L)_g(\xi_g) &= \omega_{hg}^L(T_g L_h \cdot \xi_g) \\ &= T_{hg} L_{(hg)^{-1}} \cdot T_g L_h \cdot \xi_g \\ &= T_g L_{g^{-1}} \cdot T_{hg} L_{h^{-1}} \cdot T_g L_h \cdot \xi_g \\ &= T_g L_{g^{-1}} \cdot \xi_g \\ &= \omega_g^L(\xi_g). \end{aligned}$$

On obtient de même que $R_h^* \omega^R = \omega^R$.

3. On a, en utilisant le fait que R_h et L_k commutent :

$$\begin{aligned} (R_h^* \omega^L)_g(\xi_g) &= \omega_{gh}^L(T_g R_h \cdot \xi_g) \\ &= T_{gh} L_{(gh)^{-1}} \cdot T_g R_h \cdot \xi_g \\ &= T_h L_{h^{-1}} \cdot T_{gh} L_{g^{-1}} \cdot T_g R_h \cdot \xi_g \\ &= T_h L_{h^{-1}} \cdot T_e R_h \cdot T_g L_{g^{-1}} \cdot \xi_g \\ &= \text{Ad}_h \cdot (\omega^L)_g(\xi_g). \end{aligned}$$

On montre de même que $L_h^* \omega^R = \text{Ad}_h \omega^R$.

4. On a d'une part

$$\begin{aligned} d\omega^L(X_u^L, X_v^L) &= \mathcal{L}_{X_u^L} \omega^L(X_v^L) - \mathcal{L}_{X_v^L} \omega^L(X_u^L) - \omega^L([X_u^L, X_v^L]) \\ &= \mathcal{L}_{X_u^L} v - \mathcal{L}_{X_v^L} u - \omega^L(X_{[u,v]}^L) \\ &= -[u, v], \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (\omega^L \wedge \omega^L)(X_u^L, X_v^L) &= [\omega^L(X_u^L), \omega^L(X_v^L)] - [\omega^L(X_v^L), \omega^L(X_u^L)] \\ &= [u, v] - [v, u] = 2[u, v], \end{aligned}$$

D'où

$$d\omega^L(X_u^L, X_v^L) = -\frac{1}{2}(\omega^L \wedge \omega^L)(X_u^L, X_v^L).$$

On montre de même, en utilisant le fait que $[X_u^R, X_v^R] = -X_{[u,v]}^R$, que :

$$d\omega^R = \frac{1}{2}\omega^R \wedge \omega^R.$$

Soit G un groupe de Lie. A tout élément u de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond un champ de vecteurs (sur G) défini par

$$X_u^L(g) := T_e L_g \cdot u,$$

où $L_g : h \mapsto gh$ est l'opérateur de *translation à gauche* par g . Ce champ de vecteurs est par définition *invariant à gauche*, ce qui signifie que

$$L_g^* X_u^L = X_u^L, \quad \forall g \in G.$$

On peut montrer que le flot de ce champ de vecteur, qu'on notera $\varphi_u(t, h)$ est global et commute avec les translations L_g , c'est à dire que $\varphi_u(t, L_g h) = L_g \varphi_u(t, h)$. L'*exponentielle de groupe*, notée $\exp$, est définie comme le temps 1 de ce flot pour la condition initiale $h = e$. Autrement dit

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad u \mapsto \exp(u) := \varphi_u(1, e).$$

Dans le cas où G est le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ou l'un de ses sous-groupes fermés, l'opérateur de translation à gauche s'écrit

$$L_Q : P \mapsto QP, \quad Q, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

et pour tout $M \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, le champ invariant à gauche engendré par M s'écrit

$$X_M(P) = PM.$$

Son flot $\varphi_M(t, P)$ est donc la solution du problème initial

$$\dot{P}(t) = P(t)M, \quad P(0) = P.$$

Celle-ci s'écrit $P \exp(tM)$ où

$$\exp(tM) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} M^n.$$

Ainsi, dans le cas du groupe de Lie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, l'exponentielle de groupe coïncide avec l'exponentielle matricielle.

Soit G un groupe topologique compact. Il existe alors une unique mesure de probabilité sur G qui est bi-invariante, c'est à dire telle que :

$$\forall \mathcal{B}, \quad \text{borélien de } G, \quad \forall g \in G, \quad \mu(g\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B}g) = \mu(\mathcal{B}).$$

Cette mesure de probabilité, qu'on notera μ , est la *mesure de Haar* de G . Dans le cas où G est un groupe de Lie compacte et connexe de dimension n , cette mesure de probabilité s'obtient explicitement en construisant une forme volume (invariante à droite ou à gauche), de masse totale 1. En effet, dans ce cas, toute forme volume invariante à gauche est également invariante à droite et *vice versa* (car $\det \text{Ad}_g = 1, \forall g \in G$).

Exercice 31 Mesure de Haar

Soit G un sous-groupe fermé de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Alors, d'après le théorème de Lie-Cartan, c'est un groupe de Lie. Mais c'est avant tout un groupe matriciel, c'est à dire une sous-variété de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$, ce qui simplifie beaucoup les calculs. On supposera ici que G est de dimension d et que G est de plus compact et connexe.

1. Soit μ la mesure de Haar sur G et ω la forme de Maurer-Cartan (invariante à gauche ou à droite) sur G . Soit (ξ_i) une base (directe) de $\mathfrak{g}$ et (ω^i) les composantes de ω dans cette base, montrer que :

$$\mu = C\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^d,$$

où

$$C^{-1} = \int_G \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^d.$$

Soit (u^i) un système de coordonnées locales sur G . Il induit un paramétrage de G défini par

$$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} G \subset M_n(\mathbb{R}), \quad (u^i) \mapsto p(u^i),$$

ce qui implique en particulier

$$Tp.\partial_{u^i} = \frac{\partial p}{\partial u^i}. \quad (10)$$

2. Montrer que

$$(p^*\mu)_u = k(u)(du^1 \wedge \cdots \wedge du^d), \quad \text{avec} \quad k(u) = C \det \left[\omega^i \left(\frac{\partial p}{\partial u^j} \right) \right], \quad u \in U.$$

3. On suppose que $G = \text{SO}(2)$ et on choisit le paramétrage :

$$p : \theta \in U = [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

Montrer que

$$p^*\mu = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Solution de l'exercice 31

1. Supposons, pour fixer les idées, que ω soit la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche. Alors ses composantes ω^i dans la base (ξ_i) de $\mathfrak{g}$ sont des formes (scalaires) invariantes à gauche et il en est de même de la d -forme volume

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^d.$$

Posons

$$C^{-1} = \int_G \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^d.$$

Alors $C\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d$ définit une mesure de probabilité invariante à gauche (et donc aussi à droite). Par unicité de la mesure de Haar, on a

$$\mu = C\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d.$$

2. Soit $u \in U$, on a $p^*\mu = k(u) du^1 \wedge \dots \wedge du^d$, avec

$$\begin{aligned} k(u) &= (p^*\mu)_u(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^d}) \\ &= \mu_{p(u)}(T_u p \cdot \partial_{u^1}, \dots, T_u p \cdot \partial_{u^d}) \\ &= \mu_{p(u)}\left(\frac{\partial p}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial u^d}\right) \\ &= C(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d)_{p(u)}\left(\frac{\partial p}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial u^d}\right) \\ &= C \det \left[\omega^i \left(\frac{\partial p}{\partial u^j} \right) \right], \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d)(X_1, \dots, X_d) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(d)} \varepsilon(\sigma) (\omega^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma(d)})(X_1, \dots, X_d) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(d)} \varepsilon(\sigma) \omega^{\sigma(1)}(X_1) \dots \omega^{\sigma(d)}(X_d) \\ &= \det w^i(X_j). \end{aligned}$$

3. Dans le cas d'un groupe matriciel, la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche s'écrit :

$$\omega_g^L(\xi_g) = g^{-1}\xi_g.$$

Pour $\text{SO}(2) \subset \text{GL}(2, \mathbb{R})$, qui est de dimension 1, avec

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\omega^1(\xi_g) = \xi_1^t (g^{-1}\xi_g) = \frac{1}{2} \text{tr} (g^{-1}\xi_g \xi_1^t).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} k(u) = k(\theta) &= C\omega^1\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \\ &= C\frac{1}{2} \text{tr} \left(p(\theta)^{-1} \frac{\partial p}{\partial \theta} \xi_1^t \right) \\ &= C\frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= C, \end{aligned}$$

soit

$$\mu = C d\theta, \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{2\pi},$$

et donc

$$\mu = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Pour $G = \mathrm{SO}(3)$, le calcul est un peu plus laborieux. Choisissons, par exemple, le paramétrage fourni par la formule d'Olinde–Rodrigues (voir exercice 26) :

$$p : (\phi, \psi, \theta) \in U = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [0, \pi] \mapsto R(\mathbf{n}(\phi, \psi), \theta) \in \mathrm{SO}(3),$$

où

$$\mathbf{n}(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi \\ \cos \psi \sin \phi \\ \sin \psi \end{pmatrix}.$$

En choisissant la base de $\mathfrak{so}(3)$ donnée par $(\xi_i) = (j(\mathbf{e}_i))$ (où $(\mathbf{e}_i)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$), on obtient la formule suivante :

$$\mu = \frac{1}{4\pi^2} \cos \psi (1 - \cos \theta) \, \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}\theta.$$

1.6 Dérivées covariantes

Sur une variété M , il n'y a pas de manière naturelle de dériver un champ de vecteurs. La notion de *dérivée covariante* généralise la notion de Jacobienne.

Definition 7 (Dérivée covariante). Une *dérivée covariante* sur une variété M est un opérateur linéaire

$$\nabla : \text{Vect}(M) \rightarrow \Omega^1(M, TM), \quad Y \mapsto \nabla Y,$$

qui à tout champ de vecteur Y associe une 1-forme ∇Y sur M à valeur dans TM :

$$(\nabla Y)_m : \xi_m \mapsto \nabla_{\xi_m} Y \in T_m M, \quad \xi_m \in T_m M,$$

et qui vérifie de plus l'*identité de Leibniz*

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f \nabla Y,$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et tout champ de vecteurs Y .

Remark 8. Une dérivée covariante ∇ sur M (c'est un abus de langage, on devrait dire sur TM) est donc caractérisée par les deux propriétés suivantes :

$$\nabla_{fX} Y = f(\nabla_X Y), \quad \nabla_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f(\nabla_X Y),$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et tout champs de vecteurs X, Y .

Une dérivée covariante sur M est *symétrique* si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \text{Vect}(M),$$

où $[X, Y]$ le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y .

Remark 9. Le champ de tenseurs mixtes de type $(1, 2)$ (une fois contravariant, deux fois covariant)

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \text{Vect}(M),$$

s'appelle la *torsion* de ∇ . Le champ de tenseurs mixtes de type $(1, 3)$ (une fois contravariant, trois fois covariant)

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \text{Vect}(M),$$

ou encore

$$R(X, Y)Z := [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \text{Vect}(M),$$

s'appelle le tenseur de courbure de ∇ .

Remark 10. On rappelle que dans tout système de coordonnées locales (x^i) , on a

$$(\mathcal{L}_X Y)^k = [X, Y]^k = X^j \partial_j Y^k - Y^j \partial_j X^k. \quad (11)$$

Exercice 32 Symboles de Christoffel

On se place dans une carte locale (x^i) d'une variété différentielle M et on pose

$$\Gamma_{ij}^k = (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^k, \quad (\text{symboles de Christoffel}).$$

1. Montrer que l'expression locale de la dérivée covariante d'un champ de vecteurs est

$$(\nabla_X Y)^k = X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \quad (12)$$

2. On rappelle que dans un changement de carte $y^p = y^p(x^1, \dots, x^n)$ les symboles de Christoffel se transforment comme

$$\bar{\Gamma}_{pq}^r = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^q} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^p} \right) \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \right) \Gamma_{ij}^k + \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q} \right) \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \right). \quad (13)$$

Les symboles de Christoffel définissent-ils un champ de tenseurs ?

3. Montrer que la torsion T est de nature tensorielle et calculer son expression locale. De quel type de tenseur s'agit-il ?
4. Montrer que la dérivée covariante ∇ est symétrique si et seulement si, dans toute carte locale, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Solution de l'exercice 32

1. On a (en utilisant la convention d'Einstein : un indice répété en haut et en bas est sommé)

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) \\ &= X^i (\nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j)) \\ &= X^i ((\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j) \\ &= (X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) \partial_k. \end{aligned}$$

On retiendra

$$\boxed{(\nabla_X Y)^k = X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j}$$

2. Considérons un changement de cartes $y^p = y^p(x^1, \dots, x^n)$. On retrouve les expressions de changement de carte à partir des relations

$$\frac{\partial f}{\partial y^p} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^p}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^r} \frac{\partial y^r}{\partial x^i},$$

qui nous donnent

$$\partial_{y^p} = \frac{\partial x^k}{\partial y^p} \partial_{x^k}, \quad \partial_{x^i} = \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \partial_{y^r}.$$

On obtient alors l'expression (13) des symboles Christoffel $\bar{\Gamma}_{pq}^r$ dans la carte (y^p) . Cette expression, qui fait intervenir des dérivées secondes des coordonnées, ne correspond pas à la transformation d'un champ de tenseurs dans un changement de base. Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un champ de tenseurs.

3. On remarque d'abord que T est antisymétrique. En utilisant la relation

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)X,$$

on trouve

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - (\mathcal{L}_Y f)X - f \nabla_Y X - f[X, Y] + (\mathcal{L}_Y f)X \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

Ceci confirme la nature tensorielle de T . On a ensuite (car $[\partial_i, \partial_j] = 0$)

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= X^i Y^j T(\partial_i, \partial_j) \\ &= X^i Y^j (\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i) \\ &= X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k. \end{aligned}$$

On retiendra

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

qui est un tenseur mixte de type (1, 2).

4. La dérivée covariante ∇ est symétrique si $T = 0$. En coordonnées locales ceci se traduit par

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

La définition suivante étend la notion de dérivée covariante sur les sections d'un fibré vectoriel quelconque. La définition précédente apparaît alors comme le cas particulier où $\mathbb{E} = TM$.

Définition 11 (Dérivée covariante sur un fibré vectoriel). Une *dérivée covariante* sur un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ de base M est un opérateur linéaire

$$\nabla : \Gamma(\mathbb{E}) \rightarrow \Omega^1(M, \mathbb{E}) = \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{E}), \quad \mathbf{s} \mapsto \nabla \mathbf{s},$$

qui à toute section $\mathbf{s}$ de $\mathbb{E}$ associe une 1-forme $\nabla \mathbf{s}$ sur M à valeur dans $\mathbb{E}$:

$$(\nabla \mathbf{s})_m : \xi_m \mapsto \nabla_{\xi_m} \mathbf{s} \in \mathbb{E}_m, \quad \xi_m \in T_m M,$$

et qui vérifie de plus l'*identité de Leibniz*

$$\nabla(f\mathbf{s}) = df \otimes \mathbf{s} + f \nabla \mathbf{s},$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et toute section $\mathbf{s} \in \Gamma(\mathbb{E})$.

Remark 12. Une dérivée covariante ∇ sur $\mathbb{E}$ est donc caractérisée par les deux propriétés suivantes :

$$\nabla_{fX} \mathbf{s} = f(\nabla_X \mathbf{s}), \quad \nabla_X(f\mathbf{s}) = (\mathcal{L}_X f)\mathbf{s} + f(\nabla_X \mathbf{s}),$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, tout champ de vecteurs X sur M et toute section $\mathbf{s}$ de $\mathbb{E}$.

Toute dérivée covariante sur TM induit par la règle de Leibniz une dérivée covariante sur tous les fibrés tensoriels de M .

Remark 13. Si on considère le fibré trivial $\mathbb{E} = M \times \mathbb{R}$, alors l'espace des sections de $\mathbb{E}$, qu'on a noté $\Gamma(\mathbb{E})$ s'identifie avec $C^\infty(M)$. Dans ce cas, il y a une dérivée covariante canonique qui s'écrit

$$\nabla_X f = \mathcal{L}_X f = df \cdot X.$$

Exercice 33 Dérivée covariante d'une 1-forme

Soit ∇ une dérivée covariante sur une variété M . On considère la dérivée covariante induite sur T^*M (par la règle de Leibniz) et on rappelle l'égalité

$$d\alpha(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

1. Vérifier que c'est bien une dérivée covariante sur T^*M . Autrement dit, vérifier que :

$$\nabla_{fX} \alpha = f(\nabla_X \alpha), \quad \nabla_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f(\nabla_X \alpha),$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

2. Calculer l'expression locale de $\nabla \alpha$ où $\alpha \in \Omega^1(M)$.

3. Montrer que ∇ est symétrique si et seulement si

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = (d\alpha)(X, Y),$$

pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$ et tout $X, Y \in \text{Vect}(M)$. On rappellera la définition de la dérivée extérieure pour une 1-forme :

$$(d\alpha)(X, Y) := \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Solution de l'exercice 33

1. La règle de Leibniz nous donne

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$$

et les deux propriétés qui définissent une dérivée covariante s'ensuivent immédiatement.

2. Soit (x^i) un système de coordonnées locales. On a

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)_k &= (\nabla_X \alpha)(\partial_k) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha(\partial_k)) - \alpha(\nabla_X \partial_k) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha_k) - \alpha(X^i \nabla_{\partial_i} \partial_k) \\ &= \mathcal{L}_X(\alpha_k) - \alpha(X^i \Gamma_{ik}^j \partial_j) \\ &= X^i \partial_i \alpha_k - X^i \alpha_j \Gamma_{ik}^j. \end{aligned}$$

On retiendra

$$\boxed{(\nabla_X \alpha)_k = X^i \partial_i \alpha_k - \Gamma_{ik}^j X^i \alpha_j} \quad (14)$$

3. ∇ est symétrique si et seulement si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. On a par ailleurs

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$$

d'où

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X).$$

Si la connexion est symétrique alors

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = d\alpha(X, Y).$$

Inversement, si

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = d\alpha(X, Y),$$

pour tous les champs de vecteurs X, Y et les 1-formes α , alors on a

$$\alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \alpha([X, Y])$$

et donc

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Exercice 34 Covariance de la torsion et de la courbure

Soit M une variété différentielle munie d'une dérivée covariante ∇ . Étant donné un difféomorphisme $\varphi \in \text{Diff}(M)$, on pose

$$(\varphi^* \nabla)_X Y = \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y),$$

1. Montrer que $\varphi^* \nabla$ est une dérivée covariante.

2. Montrer que si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}$ désignent respectivement la torsion

$$\mathbf{T}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \text{Vect}(M),$$

et le tenseur de courbure de ∇

$$\mathbf{R}(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \text{Vect}(M),$$

alors la torsion et le tenseur de courbure de $\varphi^* \nabla$ sont $\varphi^* \mathbf{T}$ et $\varphi^* \mathbf{R}$.

3. Soit maintenant (M, g) une variété riemannienne et ∇^g la dérivée covariante riemannienne associée à g . Montrer que :

$$\nabla^{\varphi^* g} = \varphi^* \nabla^g.$$

4. En conclure que :

$$\mathbf{R}_{\varphi^* g} = \varphi^* \mathbf{R}_g, \quad \mathbf{Ric}_{\varphi^* g} = \varphi^* \mathbf{Ric}_g, \quad R_{\varphi^* g} = \varphi^* R_g.$$

où $\mathbf{Ric}_g = \text{tr}_{24} \mathbf{R}_g$ (de composantes $R_{ij} = R_{ikj}^k$) est le tenseur de Ricci et $R = \text{tr}_g(\mathbf{Ric}_g) = g^{ij} R_{ij}$, la courbure scalaire.

Solution de l'exercice 34

1. Soit f une fonction et X, Y deux champs de vecteurs sur M . On a (C^∞ -linéarité)

$$(\varphi^* \nabla)_f X Y = \varphi^* (\nabla_{\varphi_* f \varphi_* X} \varphi_* Y) = (\varphi^* \varphi_* f) \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y) = f(\varphi^* \nabla)_X Y.$$

De plus (règle de Leibniz) :

$$\begin{aligned} (\varphi^* \nabla)_X (fY) &= \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} ((\varphi_* f)(\varphi_* Y))) \\ &= \varphi^* ((\mathcal{L}_{\varphi_* X}(\varphi_* f))\varphi_* Y + (\varphi_* f)\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y) \\ &= (\mathcal{L}_X f)Y + f\varphi^* \nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y \\ &= (\mathcal{L}_X f)Y + f(\varphi^* \nabla)_X Y. \end{aligned}$$

avec $\varphi^*(\mathcal{L}_{\varphi_* X}(\varphi_* f)) = \varphi^* \varphi_* (\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_X f$, $\varphi^* \nabla$ est bien une dérivée covariante sur M .

2. Soit X, Y deux champs de vecteurs sur M . La torsion $\mathbf{T}$ étant un tenseur, on a

$$\begin{aligned} (\varphi^* \mathbf{T})(X, Y) &= \varphi^* (\mathbf{T}(\varphi_* X, \varphi_* Y)) \\ &= \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y - \nabla_{\varphi_* Y} \varphi_* X - \varphi_* [X, Y]) \\ &= \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y) - \varphi^* (\nabla_{\varphi_* Y} \varphi_* X) - \varphi_* [X, Y] \\ &= (\varphi^* \nabla)_X Y - (\varphi^* \nabla)_Y X - [X, Y], \end{aligned}$$

qui est la torsion de $\varphi^* \nabla$, avec $\varphi^* [\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi^* \varphi_* [X, Y] = [X, Y]$.

De même, la courbure $\mathbf{R}$ étant un tenseur, on a

$$\begin{aligned} (\varphi^* \mathbf{R})(X, Y)Z &= \varphi^* (\mathbf{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z) \\ &= \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \nabla_{\varphi_* Y} \varphi_* Z - \nabla_{\varphi_* Y} \nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Z - \nabla_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} \varphi_* Z) \\ &= \varphi^* (\nabla_{\varphi_* X} \varphi_* (\varphi^* \nabla)_Y Z) - \varphi^* (\nabla_{\varphi_* Y} \varphi_* (\varphi^* \nabla)_X Z) - \varphi^* \nabla_{\varphi_* [X, Y]} \varphi_* Z \\ &= (\varphi^* \nabla)_X (\varphi^* \nabla)_Y Z - (\varphi^* \nabla)_Y (\varphi^* \nabla)_X Z - (\varphi^* \nabla)_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

qui est la courbure de $\varphi^* \nabla$.

3. La dérivée covariante riemannienne ∇^{φ^*g} pour la métrique φ^*g est l'unique dérivée covariante sur M de torsion nulle et telle que $\nabla^{\varphi^*g}\varphi^*g = 0$. Par la question 2, la torsion de la dérivée covariante $\varphi^*\nabla^g$ sur M est nulle. De plus,

$$\begin{aligned}\langle (\varphi^*\nabla^g)_Z X, Y \rangle_{\varphi^*g} + \langle X, (\varphi^*\nabla^g)_Z Y \rangle_{\varphi^*g} &= \langle \varphi^*(\nabla_{\varphi_*Z}^g \varphi_*X), Y \rangle_{\varphi^*g} + \langle X, \varphi^*(\nabla_{\varphi_*Z}^g \varphi_*Y) \rangle_{\varphi^*g} \\ &= \varphi^* \left(\langle \nabla_{\varphi_*Z}^g \varphi_*X, \varphi_*Y \rangle_g + \langle \varphi_*X, \nabla_{\varphi_*Z}^g \varphi_*Y \rangle_g \right) \\ &= \varphi^* (\mathcal{L}_{\varphi_*Z} \langle \varphi_*X, \varphi_*Y \rangle_g) \\ &= \mathcal{L}_Z \langle X, Y \rangle_{\varphi^*g},\end{aligned}$$

et donc $(\varphi^*\nabla^g)\varphi^*g = 0$ (la métrique φ^*g est parallèle pour $\varphi^*\nabla^g$). Par unicité de la dérivée covariante riemannienne, on a donc nécessairement $\nabla^{\varphi^*g} = \varphi^*\nabla^g$.

4. $\varphi^*\mathbf{R}_g$ est donc le tenseur de courbure de $\nabla^{\varphi^*g} : \varphi^*\mathbf{R}_g = \mathbf{R}_{\varphi^*g}$. Le pullback commutant avec les traces, on a finalement $\varphi^*\mathbf{Ric}_g = \varphi^*\text{tr}_{24} \mathbf{R}_g = \text{tr}_{24} \varphi^*\mathbf{R}_g = \mathbf{Ric}_{\varphi^*g}$ et $\varphi^*R_g = R_{\varphi^*g}$.

Remark 14. En mécanique classique, on fait le postulat de l'existence de *référentiels galiléens*, un concept finalement assez difficile à définir de manière rigoureuse. Ce paradigme est toutefois nécessaire pour écrire la relation fondamentale de la dynamique (équation de Newton) car ce formalisme n'est pas « covariant ». La formulation de l'équation de Newton

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = f_{ext}$$

n'est valable que dans certains référentiels « privilégiés », sauf à la corriger artificiellement avec des « termes d'inertie ». Dans l'exercice qui suit, on re-visite ce formalisme et on propose une formulation covariante inspirée par la relativité générale.

Considérons une particule dans un champ de gravitation, représenté par un champ vectoriel $g(r)$ et soumis à d'autres « forces extérieures » f_{ext} . Dans un « référentiel galiléen », la relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg + f_{ext}.$$

En fait il y a déjà une question fondamentale concernant cette écriture : pourquoi le même facteur m à droite et à gauche ? On devrait *a priori* plutôt écrire

$$m_I \frac{d^2 r}{dt^2} = m_G g + f_{ext},$$

avec m_I , masse inertielle et m_G , masse gravitationnelle. Cette question a été abordée par Einstein (et d'autres) dans les années 1910-1920 et cette réflexion a conduit au principe d'équivalence

$$m_I = m_G$$

qui est le point de départ de la relativité générale. Ce principe est maintenant vérifié expérimentalement avec une très bonne approximation, à 10^{-14} près dans la dernière expérience Micro-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence (MICROSCOPE 2018). On se permettra donc de réécrire l'équation de Newton sous la forme

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - g(r) = \frac{1}{m} f_{ext}, \quad (15)$$

avec $m = m_I = m_G$.

Exercice 35 Théorie de la gravitation de Newton–Cartan

On rappelle que l'*accélération covariante* est définie (en coordonnées locales) comme

$$\left(\frac{D\dot{c}}{Ds}\right)^k = \ddot{c}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j.$$

1. Peut-on interpréter le membre de gauche de l'équation (15) comme une accélération covariante sur $\mathbb{R}^3$? pourquoi ?
2. On passe maintenant en 4D en ajoutant le temps comme quatrième variable $(r, t) = (x, y, z, t)$. On interprète alors une solution de l'équation de Newton comme une courbe $c(s)$ dans $\mathbb{R}^4$ telle que $t = s$ et donc $\dot{t} = 1$. Peut-on interpréter le membre de gauche de l'équation (15) comme une accélération covariante sur $\mathbb{R}^4$? Que valent les symboles de Christoffel dans les coordonnées (x, y, z, t) ?
3. Cette dérivée covariante est-elle symétrique ?

Remark 15. Attention, à tout système de coordonnées locales (x^i) est associé un repère mobile (∂_{x^i}) mais l'inverse n'est pas vrai en général. Étant donné un repère mobile $(\mathbf{e}_i)$, il n'est pas toujours possible de trouver des coordonnées (x^i) telles que $\mathbf{e}_i = \partial_{x^i}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit possible s'écrit

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = 0.$$

Remark 16. La convention usuelle est d'utiliser des lettres grecques pour les indices en 4D avec la sous-notation latine pour les indices 1, 2, 3.

Solution de l'exercice 35

1. Soit ∇ une dérivée covariante sur $\mathbb{R}^3$ et $(\mathbf{e}_i)$ un repère mobile sur $\mathbb{R}^3$ (ne dérivant pas nécessairement d'un système de coordonnées locales). Posons

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = A_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

Soit $c(t)$ une courbe dans $\mathbb{R}^3$, son accélération covariante s'écrit alors

$$\left(\frac{D\dot{c}}{Dt}\right)^k = \ddot{c}^k + A_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j.$$

Or le membre de gauche de l'équation de Newton s'écrit en composantes (dans le repère galiléen)

$$\ddot{c}^k - g^k$$

ne peut donc pas s'interpréter de cette manière.

2. On considère maintenant une courbe $c(s)$ dans l'espace quadri-dimensionnel (x, y, z, t) telle que $\dot{c}^4 = 1$. L'équation de Newton étendue s'écrit alors :

$$\ddot{c}^k - g^k = f_{ext}^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \dot{c}^4 = 1.$$

Cette fois, cette équation s'écrit sous la forme

$$\ddot{c}^\rho + A_{\mu\nu}^\rho \dot{c}^\mu \dot{c}^\nu = F^\rho,$$

à condition de poser

$$A_{44}^k = -g^k, \quad F^k = \frac{1}{m} f_{ext}^k$$

et toutes les autres composantes nulles.

3. Oui cette dérivée covariante est symétrique. Ça se lit sur la symétrie des symboles de Christoffel.

Conclusion : le *principe d'équivalence* nous permet de formuler une théorie de la gravitation newtonienne covariante, c'est à dire indépendante d'un système de coordonnées particulier. Dans cette formulation, *la gravitation est modélisée par une dérivée covariante et non pas par un champ de vecteur*. Les forces d'inertie sont alors indissociables du phénomène de gravité et s'entremêlent à travers leur perception dans différents référentiels.

Remark 17. Un résultat bien connu (autre exercice) est le fait qu'une dérivée covariante est symétrique si et seulement si pour tout point $m_0 \in M$, il existe des coordonnées locales (x^i) telles que $\Gamma_{ij}^k(m_0) = 0$. L'expérience de la chute libre confirme en quelque sorte la symétrie de la dérivée covariante représentant la gravitation newtonienne.

Remark 18. C'est un exemple d'*unification des forces* comme celle qui unifie le champ électrique et le champ magnétique à travers le *tenseur de Faraday*.

Cette théorie n'est pas nouvelle, elle a un siècle ! elle est due à Elie Cartan sous forme de trois articles successifs [1, 2, 3] mais n'est malheureusement toujours pas enseignée dans les cours universitaires. Il s'agit d'une approximation de la relativité générale (au sens d'Einstein) mais qui n'est pas basée sur une métrique lorentzienne de l'espace-temps. La dérivée covariante qui représente la gravité newtonienne comme l'inertie est modélisée par une *dérivée covariante affine* (et non pas une dérivée covariante (pseudo-riemannienne) sur l'espace-temps classique et correspond à la limite, quand la vitesse de la lumière c tend vers l'infini, de la gravitation einsteinienne représentée par une dérivée covariante pseudo-riemannienne.

Le *principe fondamental de la dynamique* et ses différentes déclinaisons (équations d'équilibre, équations de la dynamique en mécanique des milieux continus) peut alors être reformulé de manière covariante (*i.e.* indépendant du choix d'un référentiel particulier). C'est le fameux principe proposé par J.M. Souriau [10]

$$\boxed{TD = 0}$$

qui propose une alternative sérieuse au Principe des Puissances Virtuelles (PPV).

Remark 19. On peut étendre cette théorie 4D pour formuler une théorie de l'*electro-gravitation* (unification de la théorie de la gravitation avec l'electro-magnétisme) à condition de passer en 5D. Cette théorie, également ancienne est baptisée *théorie de Kaluza-Klein* [5, 7, 6]. Elle ne cesse depuis d'être un sujet de recherche actif [8, 9, 4, 11].

1.7 Géométrie riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. On rappelle qu'il existe une unique dérivée covariante ∇ , appelée dérivée covariante riemannienne ou dérivée de Levi-Civita qui satisfait les propriétés suivantes :

1. ∇ est symétrique (sa torsion est nulle) : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
2. $\nabla g = 0$ (la métrique est parallèle), c'est à dire

$$\mathcal{L}_Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Dans tout système de coordonnées locales (x^i) , ses *symboles de Christoffel* s'écrivent

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial}{\partial g_{kl}} x^j + \frac{\partial}{\partial g_{lj}} x^k - \frac{\partial}{\partial g_{jk}} x^l \right).$$

Soit ∇ une dérivée covariante définie sur une variété M . Celle-ci s'étend, de manière unique, en une dérivée covariante sur les champs de vecteurs $X(t)$, définis le long d'une courbe $c(t)$ de M . Dans des coordonnées locales (x^i) , celle-ci s'écrit :

$$\left(\frac{DX}{Dt}\right)^k(t) = \dot{X}^k(t) + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i(t) X^j(t).$$

La même construction permet de définir une dérivée covariante sur les champs de vecteurs $X(s, t)$, définis le long d'une nappe paramétrée $c(s, t)$. On écrira

$$\begin{aligned} \left(\frac{DX}{Ds}\right)^k(s, t) &= \partial_s X^k(s, t) + \Gamma_{ij}^k \partial_s x^i(s, t) X^j(s, t), \\ \left(\frac{DX}{Dt}\right)^k(s, t) &= \partial_t X^k(s, t) + \Gamma_{ij}^k \partial_t x^i(s, t) X^j(s, t). \end{aligned}$$

On a alors les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \partial_s \langle X, Y \rangle_{\mathbf{x}} &= \left\langle \frac{DX}{Ds}, Y \right\rangle_{\mathbf{x}} + \left\langle X, \frac{DY}{Ds} \right\rangle_{\mathbf{x}}, \\ \partial_t \langle X, Y \rangle_{\mathbf{x}} &= \left\langle \frac{DX}{Dt}, Y \right\rangle_{\mathbf{x}} + \left\langle X, \frac{DY}{Dt} \right\rangle_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

et

$$\frac{D}{Ds} \partial_t = \frac{D}{Dt} \partial_s \text{ (torsion nulle),} \quad \frac{D}{Ds} \frac{D}{Dt} - \frac{D}{Dt} \frac{D}{Ds} = R(\partial_t, \partial_s).$$

où on a noté $\partial_s := \frac{\partial c}{\partial s}$ et $\partial_t := \frac{\partial c}{\partial t}$.

Exercice 36 Parallélisme du volume riemannien

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et $(\mathbf{e}_i)$ un repère orthonormé local.

1. Montrer que $\langle \nabla_X \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ pour tout $X \in \text{Vect}(M)$.
2. On suppose de plus que M est orientable et on note vol_g le volume riemannien. Dédurre de la question 1 que $\nabla \text{vol}_g = 0$.

Solution de l'exercice 36

1. On a $\mathcal{L}_X \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \mathcal{L}_X 1 = 0$ et donc

$$\mathcal{L}_X \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \nabla_X \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \nabla_X \mathbf{e}_i \rangle = 2 \langle \nabla_X \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 0.$$

2. Soit X un champ de vecteurs sur M , alors $\nabla_X \text{vol}_g$ est une n -forme. Elle est donc proportionnelle à la forme volume vol_g et

$$\nabla_X \text{vol}_g = (\nabla_X \text{vol}_g)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \text{vol}_g,$$

car $\text{vol}_g(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$. On a donc, par la règle de Leibniz,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X (\text{vol}_g(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)) \\ &= (\nabla_X \text{vol}_g)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) + \text{vol}_g(\nabla_X \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) + \dots \\ &\quad + \text{vol}_g(\mathbf{e}_1, \dots, \nabla_X \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n) + \dots + \text{vol}_g(\mathbf{e}_1, \dots, \nabla_X \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\nabla_X \mathbf{e}_k$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ (car orthogonal à $\mathbf{e}_k$ par la question 1), de sorte que

$$\text{vol}_g(\mathbf{e}_1, \dots, \nabla_X \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{e}_n) = 0 \quad \forall k.$$

On a donc $(\nabla_X \text{vol}_g)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 0$, soit $\nabla_X \text{vol}_g = 0$.

Remark 20. L'existence d'une forme volume parallèle implique la symétrie du *tenseur de Ricci* défini par $\mathbf{Ric} = \text{tr}_{24} \mathbf{R}$.

Étant donnée une variété riemannienne (M, g) , on définit son *groupe d'isométries*

$$\text{Isom}(M, g) := \{\varphi \in \text{Diff}(M); \varphi^*g = g\}.$$

On peut montrer que $\text{Isom}(M, g)$ est un groupe de Lie de dimension finie avec

$$\dim \text{Isom}(M, g) \leq \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{où } n = \dim M.$$

Chaque élément de son algèbre de Lie $X \in \text{Lie}(\text{Isom}(M, g))$ satisfait l'équation, dite de *Killing*,

$$\mathcal{L}_X g = 0. \quad (16)$$

Plus généralement, un champ de vecteur X qui vérifie l'équation

$$\mathcal{L}_X g = 0,$$

est appelé un *champ de Killing*. On peut montrer que l'ensemble des champs de Killing, $\text{Kill}(M, g)$, forme une sous-algèbre de Lie de $\text{Vect}(M)$, autrement dit que

$$\mathcal{L}_X g = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_Y g = 0 \implies \mathcal{L}_{[X, Y]} g = 0.$$

Attention, l'algèbre de Lie $\text{Lie}(\text{Isom}(M, g))$ est incluse dans $\text{Kill}(M, g)$ mais en générale, cette inclusion est stricte (sauf si M est compacte ou plus généralement si (M, g) est *complète*).

Exercice 37 Action infinitésimale du groupe des déplacements

Le groupe des déplacements $\text{SE}(3)$ (*i.e.* le groupe des isométries de la variété riemannienne $M = (\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$) agit sur $\mathbb{R}^3$ de la façon suivante

$$\Psi(g, \mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad g = (Q, \mathbf{a}) \in \text{SE}(3).$$

A cette action de groupe de Lie correspond une action infinitésimale de son l'algèbre de Lie $\mathfrak{se}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$, donnée par

$$X_u(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi(g(s), \mathbf{x}), \quad u \in \mathfrak{se}(3),$$

où $g(s)$ est une courbe dans $\text{SE}(3)$ telle que $g(0) = \text{id}$ et $\dot{g}(0) = u$.

1. Déterminer l'action infinitésimale $X_u(\mathbf{x})$ pour tout $u = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{se}(3) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que

$$\widetilde{\Psi}(g)^* \mathbf{q} = \mathbf{q}, \quad \forall g \in \text{SE}(3).$$

3. En déduire que

$$\mathcal{L}_{X_u} \mathbf{q} = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{se}(3).$$

4. Montrer que X_u est équiprojectif, c'est à dire que

$$X_u(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = X_u(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

5. Interprétation mécanique ?

Solution de l'exercice 37

1. On a

$$X_u(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (Q(s)\mathbf{x} + \mathbf{a}(s)) = \mathbf{u}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha},$$

où $Q(0) = \mathbf{Id}$, $\dot{Q}(0) = \mathbf{u}$, $\mathbf{a}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{a}}(0) = \boldsymbol{\alpha}$.

2. On a $\widetilde{\Psi}(g)(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Son application linéaire tangente s'écrit $T_{\mathbf{x}}\widetilde{\Psi}(g) = Q$ et donc

$$\widetilde{\Psi}(g)^*\mathbf{q} = Q^*\mathbf{q}Q = \mathbf{q}Q^tQ = \mathbf{q}.$$

3. On prend une courbe $g(s)$ dans $\text{SE}(3)$, telle que $g(0) = \text{id}$ et $\dot{g}(0) = u$. Alors

$$\mathcal{L}_{X_u}\mathbf{q} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \widetilde{\Psi}(g(s))^*\mathbf{q} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathbf{q} = 0.$$

4. Dans la preuve qui suit, on utilise la structure affine de $\mathbb{R}^3$ et on pose

$$\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Une version intrinsèque de l'équiprojectivité est proposée en remarque plus bas. Soit $g(s)$ une courbe dans $\text{SE}(3)$ telle que $g(0) = e$ et $\dot{g}(0) = u$. Comme $\widetilde{\Psi}(g(s))$ est une isométrie de l'espace affine euclidien $(\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$, on a

$$\|\Psi(g(s), \mathbf{y}) - \Psi(g(s), \mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2, \quad \forall s.$$

En dérivant en $s = 0$, on obtient alors

$$2(X_u(\mathbf{y}) - X_u(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0.$$

5. C'est un mouvement rigidifiant d'un système (solide ou non), c'est à dire le champ de vitesses d'un corps rigide utilisé notamment dans la formulation du Principe des Puissances Virtuelles en MMC. En effet,

$$\boldsymbol{\epsilon}(X_u) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{X_u} g = 0$$

où $g = \mathbf{q}$ est la métrique euclidienne, s'interprète alors comme le taux de déformation (nul donc) associé au champ de Killing X_u .

Remark 21. La propriété d'équiprojectivité peut se généraliser dans le cas d'une variété riemannienne quelconque (M, g) (ce sera l'objet de l'exercice suivant). Soit X un champ de Killing et $c(s)$ une géodésique de (M, g) , alors

$$\left. \frac{d}{ds} \right| \langle X(c(s)), \dot{c}(s) \rangle_{c(s)} = 0, \quad \forall s.$$

Exercice 38 Champs de Killing

Soit (M, g) une variété riemannienne. Soit X un champ de vecteur et φ^t son flot. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- | | | |
|-----|--|--|
| (1) | $(\varphi^t)^*g = g, \forall t,$ | $(\varphi^t \text{ est une isométrie}),$ |
| (2) | $\mathcal{L}_X g = 0,$ | $(X \text{ est un champ de Killing}),$ |
| (3) | $\langle \nabla_A X, B \rangle = -\langle A, \nabla_B X \rangle, \forall A, B \in \text{Vect}(M),$ | $(\nabla X \text{ est antisymétrique}),$ |
| (4) | $\frac{d}{dt} \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = 0, \text{ pour toute géodésique } c,$ | $(X \text{ est équiprojectif}).$ |

Solution de l'exercice 38

1. Montrons que (1) $\iff$ (2). On suppose que $(\varphi^t)^*g = g$ pour tout t , alors :

$$\mathcal{L}_X g = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \varphi(s)^* g = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} g = 0.$$

Inversement, supposons que $\mathcal{L}_X g = 0$. Sachant que $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$, on en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi^t)^* g = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\varphi^s \circ \varphi^t)^* g = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\varphi^t)^* (\varphi^s)^* g = (\varphi^t)^* \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\varphi^s)^* g = (\varphi^t)^* \mathcal{L}_X g.$$

Sachant que $\mathcal{L}_X g = 0$, alors $\frac{\partial}{\partial t} (\varphi^t)^* g = 0$ et donc $(\varphi^t)^* g$ est indépendant de t . Or, en $t = 0$, on a $(\varphi^t)^* g = g$.

2. Montrons que (2) $\iff$ (3). On suppose $\mathcal{L}_X g = 0$, on a

$$(\mathcal{L}_X g)(A, B) = \mathcal{L}_X (g(A, B)) - g(\mathcal{L}_X A, B) - g(A, \mathcal{L}_X B)$$

Sachant que $\mathcal{L}_X A = [X, A] = \nabla_X A - \nabla_A X$ puisque la dérivée covariante riemannienne est symétrique (c.-à-d. que la torsion est nulle) et que g est parallèle, ce qui implique que $\mathcal{L}_X (g(A, B)) = g(\nabla_X A, B) + g(A, \nabla_X B)$, on a donc :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)(A, B) &= g(\nabla_X A, B) + g(A, \nabla_X B) - g(\nabla_X A - \nabla_A X, B) - g(A, \nabla_X B - \nabla_B X) \\ &= g(\nabla_A X, B) + g(A, \nabla_B X). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{L}_X g = 0$ si et seulement si ∇X est antisymétrique.

3. Montrons que (3) $\iff$ (4). On suppose d'abord que ∇X antisymétrique, alors :

$$\frac{d}{dt} \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = \langle D_t X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle + \langle X(c(t)), D_t \dot{c}(t) \rangle.$$

Mais comme c est une géodésique, on a $D_t \dot{c}(t) = 0$. Ensuite, on rappelle que si $X(t) = X(c(t))$ est la restriction de X le long de $c(t)$, alors $D_t X = \nabla_{\dot{c}} X$. Par conséquent, si ∇X antisymétrique, on a :

$$\langle D_t X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = \langle \nabla_{\dot{c}} X, \dot{c} \rangle = 0.$$

Inversement, supposons que :

$$\frac{d}{dt} \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = 0,$$

pour toute géodésique c . Soit $x \in M$ et $A \in T_x M$ et considérons une géodésique c issue de x avec $\dot{c}(0) = A$, alors :

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = \langle \nabla_{\dot{c}(0)} X, \dot{c}(0) \rangle = \langle \nabla_A X, A \rangle_x,$$

et donc par polarisation, on a $\langle \nabla_A X, B \rangle_x = -\langle A, \nabla_B X \rangle_x$ pour tout $A, B \in T_x M$, et tout $x \in M$.

Exercice 39 Géométrie de la sphère S^2

On considère la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par latitude et longitude

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \cos \varphi \\ y &= \cos \theta \sin \varphi \\ z &= \sin \theta \end{aligned}$$

où θ appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et φ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Calculer la métrique dans les coordonnées (θ, φ) .
2. Calculer les équations d'Euler-Lagrange pour le problème de l'énergie cinétique

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)} dt$$

et calculer des solutions particulières des géodésiques.

3. Dédurre de la question précédente les symboles de Christoffel dans les coordonnées (θ, φ) .
4. En utilisant les symétries du tenseur de courbure de Riemann, calculer la courbure sectionnelle de la sphère.
5. Calculer les champs de Jacobi le long de l'équateur. Conclure sur les géodésiques minimisantes.

Solution de l'exercice 39

1. La métrique de la sphère est induite par celle de l'espace ambiant. Une première solution consiste à calculer la matrice de Gram :

$$g = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

d'où l'on tire :

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2.$$

La seconde solution consiste à écrire :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

avec :

$$dx = d(\cos \theta \cos \varphi), \quad dy = d(\cos \theta \sin \varphi), \quad dz = d(\sin \theta),$$

d'où l'on tire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2,$$

c'est à dire

$$g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = \cos^2 \theta.$$

2. En utilisant l'expression de la métrique identifiée à la question précédente, l'énergie cinétique se réécrit :

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2) dt$$

En dénotant par $c(s, t)$ un chemin sur la sphère avec la variable supplémentaire s pour le calcul de variations, et renommant $\partial_s|_{s=0}\dot{\theta}$ et $\partial_s|_{s=0}\dot{\varphi}$ par $\delta\dot{\theta}$ et $\delta\dot{\varphi}$ respectivement (idem pour φ), la première variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\delta E = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(c(\cdot, s)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + 2\cos^2 \theta \dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} - 2\cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2 \delta\theta) dt$$

et en intégrant par parties :

$$\delta E = [\dot{\theta}\delta\theta]_0^1 - \int_0^1 \ddot{\theta}\delta\theta dt + [\cos^2 \theta \dot{\varphi}\delta\varphi]_0^1 - \int_0^1 \partial_t(\cos^2 \theta \dot{\varphi})\delta\varphi dt - \int_0^1 \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2 \delta\theta dt.$$

Sachant que $\delta\theta(0) = \delta\theta(1) = 0$ et $\delta\varphi(0) = \delta\varphi(1) = 0$, la première variation de l'énergie cinétique se réécrit :

$$\delta E = - \int_0^1 [(\ddot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2)\delta\theta + \partial_t(\cos^2 \theta \dot{\varphi})\delta\varphi] dt.$$

Les extrémals de l'énergie cinétique sont définies par les *équations d'Euler-Lagrange*

$$\frac{\delta E}{\delta \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = -\cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta E}{\delta \varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\cos^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

On a donc une intégrale première $\cos^2 \theta \dot{\varphi} = \omega = \text{Cste}$ et une équation différentielle ordinaire

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \tan \theta (1 + \tan^2 \theta).$$

On remarque la solution particulière $\theta(t) = 0$, $\varphi(t) = \omega t$ qui correspond à l'équateur. On remarque également les solutions particulières φ constantes, soit $\dot{\varphi} = 0$, et donc $\ddot{\theta} = 0$ soit $\dot{\theta}(0) = a$ puis $\theta = at + b$ qui correspondent aux méridiens.

3. On réécrit les équations des géodésiques sous la forme

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi} \dot{\varphi} &= 0, \\ \ddot{\varphi} - 2 \tan \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui nous donne par identification avec l'équation en coordonnées locales des géodésiques

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0, & \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = 0, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \cos \theta \sin \theta, \\ \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = 0, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = -\tan \theta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0. \end{array}$$

4. Nous rappelons qu'en tout point m de la sphère, la courbure sectionnelle est définie par

$$\kappa_m(\partial_\theta, \partial_\varphi) = -\frac{R_m(\partial_\theta, \partial_\varphi, \partial_\theta, \partial_\varphi)}{g_m(\partial_\theta, \partial_\theta)g_m(\partial_\varphi, \partial_\varphi) - (g_m(\partial_\theta, \partial_\varphi))^2}$$

avec la tenseur de Riemann défini par $R(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle$ qui est alterné en (X, Y) et (Z, T) . On peut donc voir le tenseur de Riemann comme une forme quadratique sur l'ensemble des tenseurs alternés $\Lambda^2 TM$. Sachant qu'en dimension 2, $\dim \Lambda^2 TM = 1$, le tenseur de Riemann est une forme quadratique sur un espace de dimension 1, il possède donc une seule composante indépendante. Il suffit donc de calculer pour la sphère $R(\partial_\theta, \partial_\varphi, \partial_\theta, \partial_\varphi) = R_{\theta\varphi\theta\varphi}$ dans la base $\partial_\theta, \partial_\varphi$. Sachant que

$$R(\partial_\theta, \partial_\varphi \partial_\theta, \partial_\varphi) = R_{\theta\varphi\theta}{}^l g_{l\varphi} = R_{\theta\varphi\theta}{}^\theta g_{\theta\varphi} + R_{\theta\varphi\theta}{}^\varphi g_{\varphi\varphi}$$

avec $g_{\theta\varphi} = 0$ et $g_{\varphi\varphi} = \cos^2 \theta$. En rappelant que $[\partial_i, \partial_j] = 0$ et que $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, on cherche donc :

$$R(\partial_\theta, \partial_\varphi) \partial_\theta = \nabla_{\partial_\theta} \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta - \nabla_{\partial_\varphi} \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta$$

On commence par calculer

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta &= 0, \\ \nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta = -\tan \theta \partial_\varphi, \\ \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi &= \cos \theta \sin \theta \partial_\theta. \end{aligned}$$

donc, $R(\partial_\theta, \partial_\varphi) \partial_\theta = -\partial_\varphi$ et $R(\partial_\theta, \partial_\varphi \partial_\theta, \partial_\varphi) = \langle R(\partial_\theta, \partial_\varphi) \partial_\theta, \partial_\varphi \rangle = -g_{\varphi\varphi}$. La courbure sectionnelle s'obtient donc ainsi :

$$\kappa_m(\partial_\theta, \partial_\varphi) = \frac{-R_m(\partial_\theta, \partial_\varphi, \partial_\theta, \partial_\varphi)}{g_m(\partial_\theta, \partial_\theta)g_m(\partial_\varphi, \partial_\varphi) - (g_m(\partial_\theta, \partial_\varphi))^2} = \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}} = 1.$$

5. Nous commencerons par calculer le tenseur de courbure. Comme

$$R(X, Y) = -R(X, Y),$$

il suffit de calculer $R(\partial_\theta, \partial_\varphi)$ sur la base $\partial_\theta, \partial_\varphi$. On commence par calculer

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta &= 0, \\ \nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi &= \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\theta = -\tan \theta \partial_\varphi, \\ \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi &= \cos \theta \sin \theta \partial_\theta.\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}R(\partial_\theta, \partial_\varphi) \partial_\theta &= -\partial_\varphi, \\ R(\partial_\theta, \partial_\varphi) \partial_\varphi &= \cos^2 \theta \partial_\theta.\end{aligned}$$

En particulier, le long de la géodésique $\theta(t) = 0, \varphi(t) = \omega t$, on a

$$R(\partial_\theta, \partial_\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne pour un champ de vecteurs quelconque de composantes (X_θ, X_φ)

$$R(\dot{\alpha}, X) \dot{\alpha} = -\omega^2 X_\theta \partial_\theta,$$

alors que

$$\frac{D^2 X}{Dt^2} = \ddot{X}_\theta \partial_\theta + \ddot{X}_\varphi \partial_\varphi.$$

L'équation de Jacobi s'écrit donc

$$\begin{aligned}\ddot{X}_\theta &= -\omega^2 X_\theta, \\ \ddot{X}_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Les solutions de ce système d'équations qui vérifient en plus $X(0) = 0$ s'écrivent

$$\begin{aligned}X_\theta &= A \sin(\omega t) = A \sin \varphi(t), \\ X_\varphi &= Bt,\end{aligned}$$

où A et B sont des constantes. On voit donc que pour $\varphi(1) = \pi$ il existe un champ de Jacobi non nul qui s'annule aux deux extrémités de la géodésique, ce qui traduit le fait que cette géodésique cesse d'être minimisante.

Exercice 40 Géométrie de la variété de Stiefel

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit l'ensemble

$$V_k(\mathbb{R}^n) := \{X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n); \text{rang}(X) = k\}.$$

$V_k(\mathbb{R}^n)$ est donc l'ensemble des matrices rectangulaires

$$\begin{pmatrix} X^1_1 & \cdots & X^1_k \\ X^2_1 & \cdots & X^2_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X^n_1 & \cdots & X^n_k \end{pmatrix}$$

qui peuvent s'interpréter comme un système de k vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit un k -repère dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $V_k(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ et donc une variété de dimension kn qu'on appelle la *variété de Stiefel*. Le groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ agit (à droite) sur $V_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\Psi: \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \times V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n), \quad (A, X) \mapsto XA.$$

La variété de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ correspond donc à l'espace quotient (ou espace des orbites)

$$G_k(\mathbb{R}^n) \simeq V_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}),$$

où un point $[X]$ de l'espace quotient $V_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ correspond à l'ensemble de tous les k -repères X de $V_k(\mathbb{R}^n)$ qui engendrent un même sous-espace vectoriel E de $G_k(\mathbb{R}^n)$. On admettra que la projection canonique $\pi: V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) := G_k(\mathbb{R}^n)$ est une submersion (c'est-à-dire que $T\pi$ surjective). Pour tout $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$, on définit alors l'espace vertical $V_X = \ker T_X\pi$.

1. Montrer que pour tout $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$, V_X est engendré par les vecteurs $\{\xi_u(X); u \in \mathfrak{gl}(k)\}$.

On introduit sur $V_k(\mathbb{R}^n)$ la métrique riemannienne

$$g_X(Z_1, Z_2) := \mathrm{tr}((X^\top X)^{-1} Z_1^\top Z_2).$$

2. On rappelle qu'un difféomorphisme φ est une isométrie d'une variété riemannienne (M, g) si $\varphi^*g = g$. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ agit isométriquement pour cette métrique.
3. Calculer les équations d'Euler-Lagrange pour le problème de l'énergie cinétique

$$E(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle_{X(t)} dt.$$

On définit l'espace horizontal $H_X = (\ker T_X\pi)^\perp$. Un vecteur $Z \in H_X$ est donc caractérisé par

$$g_X(Z, \xi_u) = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{gl}(k).$$

Une courbe $t \mapsto X(t) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ est dite horizontale si $\dot{X}(t) \in H_{X(t)}$, $\forall t$.

4. Soit $X(t)$ une géodésique avec conditions initiales $X_0 = X_0$ et $\dot{X}(0) = \dot{X}_0$. Montrer que si $\dot{X}_0 \in H_{X_0}$, alors $X(t)$ est horizontale $\forall t$.
5. Soit $X(t) \in V_k(\mathbb{R}^n)$ une courbe horizontale. Montrer que $\dot{X}^T X = 0$ et que $X^T \dot{X} = 0$. En déduire que $\partial_t(X^T X)^{-1} = 0$ et donner l'équation des géodésiques *horizontales*.

Solution de l'exercice 40

1. On rappelle que $\dim V_k(\mathbb{R}^n) = kn$, $\dim \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) = k^2$ et $\dim G_k(\mathbb{R}^n) = k(n-k)$. Sachant que

$$T_X\pi: T_X V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{\pi(X)} G_k(\mathbb{R}^n)$$

est surjective et que $V_X = \ker T_X\pi$, on a

$$\dim V_X = \dim V_k(\mathbb{R}^n) - \dim G_k(\mathbb{R}^n) = kn - k(n-k) = k^2,$$

soit la même dimension que le groupe $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$. On a par ailleurs $\pi(X \exp(tu)) = \pi(X)$, pour tout $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$ et tout $u \in \mathfrak{gl}(k)$, et donc (par dérivation en t)

$$T_X\pi.Xu = T_X\pi.\xi_u(X) = 0,$$

ce qui montre que $\xi_u(X) \in V_X$ pour tout $u \in \mathfrak{gl}(k)$. Enfin, nous allons établir que l'application linéaire

$$\xi: \mathfrak{gl}_k \rightarrow V_X, u \mapsto \xi_u(X) = Xu$$

est injective, ce qui entraînera que la dimension du sous-espace $\{\xi_u(X); u \in \mathfrak{gl}(k)\}$ est k^2 , comme celle de V_X et achèvera la démonstration. Soit $u \in \mathfrak{gl}_k$ tel que $Xu = 0$. Alors, en désignant par X_I le mineur de taille $k \times k$ extrait de X par les lignes indexées par I (cf TD2), on a $(Xu)_I = X_I u = 0$ avec X_I inversible. Donc $u = 0$ et ξ est injective.

2. Montrer que le groupe $GL_k(\mathbb{R})$ agit isométriquement pour cette métrique sur $V_k(\mathbb{R}^n)$ revient à montrer que cette métrique est invariante par l'action à droite du groupe $GL_k(\mathbb{R})$, soit

$$g_{XA}(Z_1A, Z_2A) = g_X(Z_1, Z_2), \quad \forall A \in GL_k(\mathbb{R}).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} g_{XA}(Z_1A, Z_2A) &= \text{tr} \left[\left((XA)^T XA \right)^{-1} (Z_1A)^T Z_2A \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(A^T X^T X A \right)^{-1} A^T Z_1^T Z_2 A \right] \\ &= \text{tr} \left[A^{-1} \left(X^T X \right)^{-1} A^{-T} A^T Z_1^T Z_2 A \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(X^T X \right)^{-1} Z_1^T Z_2 \right] \\ &= g_X(Z_1, Z_2) \end{aligned}$$

Donc $GL_k(\mathbb{R})$ agit isométriquement sur $(V_k(\mathbb{R}^n), g)$.

3. L'énergie cinétique est donnée par

$$E(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{X(t)}(\dot{X}(t), \dot{X}(t)) dt$$

avec $X(t)$ une courbe sur $V_k(\mathbb{R}^n)$, $\dot{X}(t) \in T_{X(t)}V_k(\mathbb{R}^n)$. On introduit une seconde variable s pour le calcul des variations $X = X(s, t)$. La première variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\delta E = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E(X(s, \cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_s|_{s=0} \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} \right] dt,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\delta E = \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[\partial_s|_{s=0} \left[(X^T X)^{-1} \right] \dot{X}^T \dot{X} + (X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \dot{X} + (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \delta \dot{X} \right] dt.$$

Sachant que $\partial_s|_{s=0} [(X^T X)^{-1}] = -(X^T X)^{-1} [\delta X^T X + X^T \delta X] (X^T X)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \delta E &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \delta X^T X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \dot{X} \right] dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} X^T \delta X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \delta \dot{X} \right] dt. \end{aligned}$$

Par permutation circulaire dans la trace et avec $(X^T X)^{-T} = (X^T X)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \delta X^T X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} \right] &= \text{tr} \left[X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} (X^T X)^{-1} \delta X^T \right] \\ \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} X^T \delta X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} \right] &= \text{tr} \left[\dot{X}^T \dot{X} (X^T X)^{-1} \delta X^T X (X^T X)^{-1} \right] \\ &= \text{tr} \left[X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} (X^T X)^{-1} \delta X^T \right] \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \dot{X} \right] &= \text{tr} \left[\dot{X} (X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \right] \\ \text{tr} \left[(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \delta \dot{X} \right] &= \text{tr} \left[\delta \dot{X}^T \dot{X} (X^T X)^{-1} \right] = \text{tr} \left[\dot{X} (X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\delta E = - \int_0^1 \text{tr} \left[X (X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} (X^T X)^{-1} \delta X^T \right] dt + \int_0^1 \text{tr} \left[\dot{X} (X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T \right] dt.$$

Sachant que :

$$\int_0^1 \operatorname{tr} [\dot{X}(X^T X)^{-1} \delta \dot{X}^T] dt = \left[\operatorname{tr} (\dot{X}(X^T X)^{-1} \delta X^T) \right]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{tr} [\partial_t (\dot{X}(X^T X)^{-1}) \delta X^T] dt$$

avec, $\delta X^T(t=0) = \delta X^T(t=1) = 0$, la première variation devient :

$$\delta E = - \int_0^1 \operatorname{tr} \left[\left(X(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X}(X^T X)^{-1} + \partial_t (\dot{X}(X^T X)^{-1}) \right) \delta X^T \right] dt$$

et on en déduit les équations d'Euler-Lagrange pour le problème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \delta E = 0 &\Leftrightarrow \partial_t (\dot{X}(X^T X)^{-1}) + X(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X}(X^T X)^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ddot{X}(X^T X)^{-1} + \dot{X} \partial_t (X^T X)^{-1} + X(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X}(X^T X)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

avec, $\partial_t (X^T X)^{-1} = -(X^T X)^{-1} [\dot{X}^T X + X^T \dot{X}] (X^T X)^{-1}$.

4. L'action de $GL_k(\mathbb{R}^n)$ sur $V_k(\mathbb{R}^n)$ étant isométrique, les champs de vecteurs $\xi_u(X) = Xu$ sont des champs de Killing et donc (voir exercice 3)

$$g_{X(t)}(\xi_u(X(t)), \dot{X}(t)) = g_{X(0)}(\xi_u(X(0)), \dot{X}(0)), \quad \forall u \in \mathfrak{gl}(k) \in \forall t.$$

Ainsi, une géodésique $X(t)$ horizontale en $t=0$ est horizontale $\forall t$.

5. On suppose $X(t)$ horizontale, donc $g_{X(t)}(\dot{X}, \xi_u(X)) = 0$, $\forall u \in \mathfrak{gl}_k$, avec $\xi_u(X) = Xu$. On a donc

$$\operatorname{tr} \left((X^T X)^{-1} \dot{X}^T Xu \right) = \operatorname{tr} \left(u(X^T X)^{-1} \dot{X}^T X \right) = 0, \quad \forall u \in \mathfrak{gl}_k,$$

par permutation circulaire dans la trace. En posant $A = u(X^T X)^{-1}$, $B = \dot{X}^T X$, et en observant que $u(X^T X)^{-1}$ parcourt tout l'espace $\mathfrak{gl}_k$ quand u parcourt $\mathfrak{gl}_k$, on en déduit que $\dot{X}^T X = X^T \dot{X} = 0$. Par conséquent

$$\partial_t (X^T X)^{-1} = -(X^T X)^{-1} (\dot{X}^T X + X^T \dot{X}) (X^T X)^{-1} = 0.$$

Ainsi, pour une géodésique horizontale, l'équation des géodésiques se simplifie en :

$$\ddot{X} + X(X^T X)^{-1} \dot{X}^T \dot{X} = 0.$$

Exercice 41 Minimum de la longueur *versus* de l'énergie

1. Calculer les variations première et seconde de l'énergie cinétique,

$$K(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)} dt,$$

2. Montrer que toute courbe c qui est un point critique de K est également un point critique de la longueur

$$\ell(c) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)}} dt.$$

3. Montrer qu'un point critique pour la longueur n'est pas nécessairement un point critique pour l'énergie.

Solution de l'exercice 41

1. Soit $c(t)$ un chemin sur M joignant deux points a et b . Une variation de c à extrémités fixes est une famille à un paramètre $c_s(t) := c(s, t)$ de courbes joignant a et b et telle que $c_0(t) = c(0, t) = c(t)$. C'est à dire

$$c(s, 0) = a, \quad c(s, 1) = b, \quad c(0, t) = c(t)$$

pour tout s, t . On pose $\delta c(t) := \partial_s c(0, t)$. Alors, par construction on a $\delta c(0) = \delta c(1) = 0$. La première variation de l'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \delta K &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} K(c_s) = \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \partial_s \langle \partial_t c(s, t), \partial_t c(s, t) \rangle_{c(s, t)} dt \right]_{s=0} \\ &= \left[\int_0^1 \left\langle \partial_t c(s, t), \frac{D}{Ds} \partial_t c(s, t) \right\rangle_{c(s, t)} dt \right]_{s=0} \\ &= \left[\int_0^1 \left\langle \partial_t c(s, t), \frac{D}{Dt} \partial_s c(s, t) \right\rangle_{c(s, t)} dt \right]_{s=0} \\ &= \int_0^1 \left\langle \dot{c}(t), \frac{D}{Dt} \delta c(t) \right\rangle_{c(t)} dt \end{aligned}$$

car $\left[\frac{D}{Ds} \partial_t c(s, t) \right]_{s=0} = \frac{D}{Dt} \partial_s c(s=0, t) = \frac{D}{Dt} \delta c(t)$. Or

$$\left\langle \dot{c}, \frac{D}{Dt} \delta c \right\rangle_c = \partial_t \langle \dot{c}, \delta c \rangle_c - \left\langle \frac{D\dot{c}}{Dt}, \delta c \right\rangle_{c(t)}.$$

Par intégration par partie,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} K(c_s) = [\langle \dot{c}, \delta c \rangle_c]_0^1 - \int_0^1 \left\langle \frac{D\dot{c}}{Dt}, \delta c \right\rangle_c dt$$

où $[\langle \dot{c}, \delta c \rangle_c]_0^1 = 0$ car $\delta c(0) = \delta c(1) = 0$ (extrémités fixes). Un point critique de l'énergie satisfait donc

$$\frac{D\dot{c}}{Dt} = 0, \quad (\text{équation des géodésiques}).$$

Les calculs sont similaires pour la première variation de la longueur $\ell(c)$. Il conduisent à

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell(c_s) = - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{Dt} \left(\frac{\dot{c}}{\sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c}} \right), \delta c \right\rangle_c dt.$$

Un point critique de la longueur satisfait

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\dot{c}}{\sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c}} \left(\frac{D\dot{c}}{Dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial_t \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c}{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c} \dot{c} \right) = 0,$$

soit

$$\frac{D\dot{c}}{Dt} - \left\langle \frac{D\dot{c}}{Dt}, \dot{c} \right\rangle_c \frac{\dot{c}}{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c} = 0.$$

Tout point critique de l'énergie $K(c)$ satisfait $\frac{D\dot{c}}{Dt} = 0$. C'est donc un point critique de la longueur $\ell(c)$.

2. La réciproque est fautive : un point critique pour la longueur satisfait

$$\frac{D\dot{c}}{Dt} - \left\langle \frac{D\dot{c}}{Dt}, \dot{c} \right\rangle_c \frac{\dot{c}}{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle_c} = 0,$$

qui n'implique pas nécessairement $\frac{D\dot{c}}{Dt} = 0$. En effet, d'autres solutions satisfont $\frac{D\dot{c}}{Dt} = \lambda \dot{c}$, $\lambda \neq 0$.

Soit G un groupe de Lie. Une métrique riemannienne γ sur G est la donnée d'un produit scalaire

$$\gamma_g(\delta_1 g, \delta_2 g) = \langle \delta_1 g, \delta_2 g \rangle_g, \quad \delta_1 g, \delta_2 g \in T_g G,$$

sur chaque espace tangent, qui dépend de manière C^∞ de $g \in G$. Elle est *invariante à gauche* si

$$L_g^* \gamma = \gamma, \quad \forall g \in G.$$

Elle est *invariante à droite* si

$$R_g^* \gamma = \gamma, \quad \forall g \in G.$$

Une telle métrique est entièrement déterminée par sa valeur en l'élément neutre e du groupe, c'est à dire par un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$, autrement dit par un opérateur

$$A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \text{tel que} \quad \langle u, v \rangle_e = (Au, v) = (Av, u),$$

appelé *opérateur d'inertie*.

Cas d'une métrique invariante à gauche.

Pour une métrique γ *invariante à gauche*, sa dérivée covariante est également invariante à gauche. Son expression pour des champs de vecteurs invariants à gauche s'écrit

$$\nabla_{X_u^L} X_v^L = \frac{1}{2} [X_u^L, X_v^L] + B(X_u^L, X_v^L),$$

où B est un champ de tenseur invariant à gauche défini par

$$B(X_u^L, X_v^L) = X_{b(u,v)}^L = T_e L_g \cdot b(u, v), \quad \text{et} \quad b(u, v) = -\frac{1}{2} (\text{ad}_u^T v + \text{ad}_v^T u),$$

ad_u^T désignant la transposée de ad_u par rapport au produit scalaire A défini sur $\mathfrak{g}$, c'est à dire

$$\gamma_e(\text{ad}_u^T v, w) = \gamma_e(v, \text{ad}_u w), \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}.$$

Étant donné une courbe $g(t)$ sur G on introduit la *vitesse eulerienne à gauche*

$$u_L(t) = \omega^L(\dot{g}(t)) = T L_{g(t)}^{-1} \cdot \dot{g}(t)$$

qui est une courbe sur $\mathfrak{g}$. On montre alors que si $g(t)$ est une géodésique, $u_L(t)$ satisfait l'équation du premier ordre

$$\dot{u}_L = -b(u_L, u_L) = \text{ad}_{u_L}^T u_L \quad (\text{Equation d'Euler-Arnold (1966)}).$$

Exercice 42 Déclinaison de l'équation d'Euler-Arnold pour le solide rigide

Le but de cet exercice est de retrouver les équations du mouvement du solide rigide comme cas particulier de l'équation d'Euler-Arnold.

On considère un solide rigide $\mathcal{S}$ en rotation autour de son centre de gravité O . On note $\mathcal{S}_0$ une configuration de référence et $\mathbf{X} = (X^i)$ des coordonnées lagrangiennes euclidiennes, telles que $\mathbf{X}_O = 0$. Le choix d'une configuration de référence permet d'identifier l'espace des configurations au groupe des rotations $G = \text{SO}(3)$. En effet, chaque transformation φ s'écrit de manière unique

$$\varphi: \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) = g\mathbf{X}, \quad g \in \text{SO}(3).$$

En particulier, on notera que $T\varphi = g$ et donc que

$$\varphi^* \text{vol}_{\mathbf{q}} = (\det g) \text{vol}_{\mathbf{q}} = \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Le solide est muni d'une mesure de masse μ , défini sur $\mathcal{S}_0$. Celle-ci peut se réécrire

$$\mu = \rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

où la fonction $\rho_0 = \mu/\text{vol}_{\mathbf{q}}$ est la masse volumique sur la configuration de référence. La conservation de la masse s'écrit

$$\varphi_*\mu = \varphi_*(\rho_0 \text{vol}_{\mathbf{q}}) = \rho \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

et définit la masse volumique $\rho = (\varphi_*\mu)/\text{vol}_{\mathbf{q}}$ sur $\mathcal{S} = \varphi(\mathcal{S}_0)$, où

$$\rho = \rho_0 \circ \varphi^{-1}.$$

L'action à gauche sur le groupe des rotations $\text{SO}(3)$ s'écrit $L_h g = hg$, de sorte que

$$T_g L_h \cdot \delta g = h \delta g \quad \text{si } \delta g \in T_g \text{SO}(3).$$

1. Soit $\mathbf{V} = \partial_t \varphi$ la vitesse lagrangienne et $\mathbf{u} = \mathbf{V} \circ \varphi^{-1}$ la vitesse eulerienne à droite (un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}$). Montrer que l'énergie cinétique du solide se réécrit :

$$K_g(\dot{g}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}_0} \|g^{-1} \dot{g} \mathbf{X}\|^2 \mu.$$

2. Par polarisation de la forme quadratique $2K_g(\dot{g})$ dépendant de g , en déduire une métrique riemannienne

$$\gamma_g(\delta_1 g, \delta_2 g) = \langle \delta_1 g, \delta_2 g \rangle_g$$

sur $\text{SO}(3)$ et l'expliciter.

3. Montrer que cette métrique est invariante à gauche.
4. Expliciter la valeur de cette métrique riemannienne, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e$, en l'élément neutre $e = I_3$ de $\text{SO}(3)$, c'est à dire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ du groupe de Lie $\text{SO}(3)$.

On introduit l'isomorphisme linéaire

$$j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad u \mapsto \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on rappelle que le crochet de Lie sur $\mathfrak{so}(3)$ s'écrit :

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}.$$

5. Montrer que $[j(u), j(v)] = j(u \times v)$, où $\times$ désigne le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$. En déduire que le produit vectoriel définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^3$, isomorphe par j à l'algèbre de Lie $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$.

On rappelle que l'opérateur d'inertie $\mathbf{A} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ est défini par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e = (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v})$, où $(\cdot, \cdot)$ désigne le crochet de dualité entre $\mathfrak{so}(3)$ et son dual. Alors, l'opérateur d'inertie $\mathbf{A}$ est représenté par un opérateur symétrique définie positif A sur $\mathbb{R}^3$, défini implicitement par

$$(\mathbf{A}j(u), j(v)) = (Au) \cdot v,$$

où $\cdot$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

6. Expliciter l'opérateur d'inertie A . On utilisera la relation

$$(u \times \mathbf{X}) \cdot (v \times \mathbf{X}) = (\mathbf{X} \times (u \times \mathbf{X})) \cdot v = (\|\mathbf{X}\|^2 u - \mathbf{X}\mathbf{X}^t u) \cdot v.$$

Soit $g(t) \in G = \text{SO}(3)$ une géodésique pour la métrique γ et

$$\boldsymbol{\Omega}(t) := TL_{g(t)}^{-1} \cdot \dot{g}(t) = g(t)^{-1} \dot{g}(t),$$

alors $\boldsymbol{\Omega}(t) \in \text{Lie}(G) = \mathfrak{so}(3)$ satisfait l'équation d'Euler-Arnold à gauche

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \text{ad}_{\boldsymbol{\Omega}}^T \boldsymbol{\Omega},$$

où $\text{ad}_{\mathbf{u}}^T$ est la transposée (l'adjoint), pour le produit scalaire γ_e sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, de l'opérateur linéaire :

$$\text{ad}_{\mathbf{u}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{u}, \mathbf{v}]_{\mathfrak{so}(3)} = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}, \quad \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3).$$

7. On note $\mathbf{u} = j(u)$, $\mathbf{v} = j(v)$. Montrer que

$$\text{ad}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} = j(w), \quad \text{avec} \quad w = A^{-1}((Av) \times u).$$

8. En déduire que l'équation d'Euler-Arnold se réécrit

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = A^{-1}((A\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}).$$

où $\boldsymbol{\omega} = (\omega^i) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur rotation instantané par rapport au solide défini par :

$$\boldsymbol{\Omega} = j(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. On se place dans une base propre de l'opérateur d'inertie $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation d'Euler-Arnold correspond aux équations du mouvement du solide rigide formulées par Euler en 1765 :

$$\dot{\omega}^1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega^2 \omega^3, \quad \dot{\omega}^2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega^1 \omega^3, \quad \dot{\omega}^3 = \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega^1 \omega^2.$$

où les I_k , valeurs propres de A , sont les moments d'inertie principaux du solide rigide.

Solution de l'exercice 42

1. L'énergie cinétique du solide s'écrit :

$$K = \frac{1}{2} \int_S \rho \|\mathbf{u}\|^2 \text{vol}_{\mathbf{q}},$$

où $\mathbf{u} = \dot{g}g^{-1}\mathbf{x}$ avec $\mathbf{x} = g\mathbf{X}$. On a donc, en utilisant la formule de changement de variable :

$$K = \frac{1}{2} \int_S \|\dot{g}g^{-1}\mathbf{x}\|^2 \rho \text{vol}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \int_{S_0 = \varphi^{-1}} (\mathcal{S}) \|\dot{g}\mathbf{X}\|^2 \varphi^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \int_{S_0} \|g^{-1}\dot{g}\mathbf{X}\|^2 \mu,$$

car $\|g^{-1}\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{Y}\|$ et $\varphi^*(\rho \text{vol}_{\mathbf{q}}) = \mu$ (conservation de la masse). L'énergie cinétique est donc bien une forme quadratique $K_g(\dot{g})$ de $\dot{g}$ dépendant de g .

2. La polarisation de la forme quadratique $2K_g(\dot{g})$ s'écrit :

$$\gamma_g(\delta_1 g, \delta_2 g) := \frac{1}{2} [K_g(\delta_1 g + \delta_2 g) - K_g(\delta_1 g - \delta_2 g)] = \int_{S_0} (g^{-1}\delta_1 g \mathbf{X}) \cdot (g^{-1}\delta_2 g \mathbf{X}) \mu,$$

où $\delta_1 g, \delta_2 g \in T_g \text{SO}(3)$. Elle définit bien une métrique riemannienne sur G car la forme quadratique

$$K_g(\delta g) = \frac{1}{2} \gamma_g(\delta g, \delta g)$$

est définie positive et toutes les expressions sont C^∞ en g .

3. L'action à gauche sur $\text{SO}(3)$ s'écrit $L_h g = hg$ et donc $T_g L_h \cdot \delta g = h \delta g$. La métrique riemannienne γ est invariante à gauche car

$$\begin{aligned}\gamma_{hg}(h\delta_1 g, h\delta_2 g) &= \int_{S_0} ((hg)^{-1} h\delta_1 g \mathbf{X}) \cdot ((hg)^{-1} h\delta_2 g \mathbf{X}) \mu \\ &= \int_{S_0} (g^{-1} h^{-1} h\delta_1 g \mathbf{X}) \cdot (g^{-1} h^{-1} h\delta_2 g \mathbf{X}) \mu = \gamma_g(\delta_1 g, \delta_2 g),\end{aligned}$$

et donc $\gamma_{L_h g}(T_g L_h \cdot \delta_1 g, T_g L_h \cdot \delta_2 g) = \gamma_g(\delta_1 g, \delta_2 g)$, pour tout $h \in \text{SO}(3)$.

4. Pour $g = e = I_3$, on obtient

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e = \gamma_e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{S_0} (\mathbf{u} \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{v} \mathbf{X}) \mu, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_e \text{SO}(3) = \mathfrak{so}(3).$$

5. On pourra vérifier que :

$$j(u) \mathbf{X} = u \times \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que :

$$[j(u), j(v)] \mathbf{X} = j(u)j(v) \mathbf{X} - j(v)j(u) \mathbf{X} = u \times (v \times \mathbf{X}) - v \times (u \times \mathbf{X}) = (u \times v) \times \mathbf{X},$$

et donc $j(u \times v) = [j(u), j(v)]$.

6. L'opérateur d'inertie $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est défini implicitement par

$$(\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{S_0} (\mathbf{u} \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{v} \mathbf{X}) \mu = (A \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \int_{S_0} (u \times \mathbf{X}) \cdot (v \times \mathbf{X}) \mu,$$

où $\mathbf{u} = j(u)$, $\mathbf{v} = j(v)$, $u, v \in \mathbb{R}^3$. On a donc

$$(A \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \int_{S_0} (u \times \mathbf{X}) \cdot (v \times \mathbf{X}) \mu = \int_{S_0} (\|\mathbf{X}\|^2 u - \mathbf{X} \mathbf{X}^t u) \cdot \mathbf{v} \mu,$$

soit

$$A = \int_{S_0} (\|\mathbf{X}\|^2 I - \mathbf{X} \mathbf{X}^t) \mu.$$

On notera que :

$$A_{11} = \int_{S_0} (Y^2 + Z^2) \mu, \quad A_{12} = \int_{S_0} XY \mu, \quad \dots$$

où $\mu = \rho_0 dX \wedge dY \wedge dZ$, sont les moments d'inertie du solide.

7. On rappelle que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e = \langle j(u), j(v) \rangle_e = (A \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$. On a par ailleurs

$$\text{ad}_{\mathbf{u}} \mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] = j(u \times w).$$

On a donc

$$\langle \text{ad}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_e = \langle \mathbf{v}, \text{ad}_{\mathbf{u}} \mathbf{w} \rangle_e = \langle j(v), j(u \times w) \rangle_e = (A \mathbf{v}) \cdot (u \times w).$$

Or

$$\begin{aligned}A \mathbf{v} \cdot (u \times w) &= [A \mathbf{v}, u, w] \\ &= [w, A \mathbf{v}, u] \\ &= w \cdot (A \mathbf{v} \times u) \\ &= (A^{-1} A \mathbf{v}) \cdot (A \mathbf{v} \times u) \\ &= (A \mathbf{v}) \cdot A^{-1} (A \mathbf{v} \times u) \\ &= \langle j(w), j(A^{-1} (A \mathbf{v} \times u)) \rangle_e.\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{ad}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} = j(A^{-1} (A \mathbf{v} \times u)).$$

8. L'équation d'Euler–Arnold se réécrit finalement $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = j(\dot{\boldsymbol{\omega}}) = j(A^{-1}((A\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}))$, soit

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = A^{-1}((A\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3,$$

9. Si l'on se place dans une base propre de A , alors

$$A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_1\omega^1 \\ I_2\omega^2 \\ I_3\omega^3 \end{pmatrix}, \quad (A\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} (I_2 - I_3)\omega^2\omega^3 \\ (I_3 - I_1)\omega^1\omega^3 \\ (I_1 - I_2)\omega^1\omega^2 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\dot{\omega}^1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega^2 \omega^3, \quad \dot{\omega}^2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega^1 \omega^3, \quad \dot{\omega}^3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega^1 \omega^2.$$

On reconnaît les équations d'Euler du solide rigide en rotation.

Cas d'une métrique invariante à droite.

Pour une métrique γ *invariante à droite*, sa dérivée covariante est également invariante à droite. Son expression pour des champs de vecteurs invariants à droite s'écrit

$$\nabla_{X_u^R} X_v^R = \frac{1}{2} [X_u^R, X_v^R] + B(X_u^R, X_v^R),$$

où B est un champ de tenseur invariant à droite défini par

$$B(X_u^R, X_v^R) = X_{b(u,v)}^R = T_e R_g \cdot b(u, v), \quad \text{et} \quad b(u, v) = +\frac{1}{2} (\text{ad}_u^T v + \text{ad}_v^T u),$$

ad_u^T désignant la transposée de ad_u par rapport au produit scalaire A défini sur $\mathfrak{g}$. Étant donné une courbe $g(t)$ sur G on introduit la *vitesse eulerienne à droite*

$$u_R(t) = \omega^R(\dot{g}(t)) = T R_{g(t)}^{-1} \cdot \dot{g}(t)$$

qui est une courbe sur $\mathfrak{g}$. On montre alors que si $g(t)$ est une géodésique, $u_R(t)$ satisfait l'équation du premier ordre

$$\dot{u}_R = -b(u_R, u_R) = -\text{ad}_{u_R}^T u_R \quad (\text{Equation d'Euler–Arnold (1966)}).$$

Exercice 43 Déclinaison de l'équation d'Euler–Arnold pour le fluide parfait

Le but de cet exercice est de retrouver les équations du mouvement du fluide parfait ($\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{q}^{-1}$), incompressible ($\varphi^ \text{vol}_{\mathbf{q}} = \text{vol}_{\mathbf{q}}$), homogène ($\nabla \rho = 0$), sans frontière libre, comme cas particulier de l'équation d'Euler–Arnold.*

On considère un domaine Ω_0 régulier, relativement compact de l'espace euclidien $\mathcal{E}$. On note $\mathbf{n}$ sa normale unitaire extérieure et $\mathbf{q}$ la métrique euclidienne.

Les équations de la dynamique d'un tel fluide s'écrivent

$$\rho = \text{cste}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \rho (\partial_t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}) + \text{grad } p = 0.$$

où ρ , $\mathbf{u}$, et p désignent respectivement la masse volumique, la vitesse eulerienne (à droite) et la pression. En utilisant la formule vectorielle

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \text{grad } \|\mathbf{u}\|^2 + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u},$$

et en introduisant l'enthalpie spécifique

$$h = \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2,$$

ces equations se réécrivent

$$\rho = \text{cste}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} - \operatorname{grad} h.$$

On remarquera en particulier que l'on a la contrainte suivante due à l'incompressibilité,

$$\Delta h = \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}).$$

L'espace des configurations d'un fluide incompressible sans frontière libre s'identifie avec le groupe des difféomorphismes préservant la forme volume $\operatorname{vol}_{\mathbf{q}}$,

$$G = \operatorname{SDiff}(\Omega_0) = \{\varphi \in \operatorname{Diff}(\Omega_0), \varphi^* \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(\operatorname{SDiff}(\Omega_0))$ est alors

$$\mathfrak{g} = \operatorname{SVect}(\Omega_0) = \{X \in \operatorname{Vect}(\Omega_0); \operatorname{div} X = 0 \text{ et } X \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0\}.$$

Elle est munie du crochet de Lie défini par l'opposé du crochet de Lie des champs de vecteurs,

$$\operatorname{ad}_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{g}} = -[X, Y]_{\operatorname{Vect}(\Omega_0)} = \operatorname{rot}(X \times Y),$$

car $\operatorname{rot}(X \times Y) = X \operatorname{div} Y - Y \operatorname{div} X - [X, Y]_{\operatorname{Vect}}$.

1. On définit respectivement

$$\mathbf{V} := \partial_t \varphi, \quad \text{et} \quad \mathbf{u} := \mathbf{V} \circ \varphi^{-1},$$

la vitesse lagrangienne et la vitesse eulerienne (à droite). Montrer que l'énergie cinétique du solide se réécrit

$$K(\varphi, \mathbf{V}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \|\mathbf{V} \circ \varphi^{-1}\|^2 \rho \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}.$$

2. Montrer que l'énergie cinétique $K(\varphi, \mathbf{V})$ définit une métrique riemannienne $\gamma_{\varphi}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ invariante à droite sur $G = \operatorname{SDiff}(\Omega_0)$. Expliciter le produit scalaire correspondant $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\operatorname{id}}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \operatorname{SVect}(\Omega_0)$.
3. On introduit alors le produit scalaire L^2 sur $\operatorname{SVect}(\Omega_0)$,

$$\langle X, Y \rangle_{\operatorname{SVect}(\Omega_0)} := \int_{\Omega_0} X \cdot Y \rho \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Expliciter l'opérateur d'inertie A dans ce cas.

4. Montrer que l'opérateur adjoint ad_X^T relativement au produit scalaire A a pour expression

$$\operatorname{ad}_X^T Z = \operatorname{rot} Z \times X + \operatorname{grad} h,$$

où h est une fonction déterminée de manière unique à une constante près. De quelle équation est solution la fonction h ?

On utilisera les propriétés suivantes, valables pour tous champs de vecteurs $X, Y, Z \in \operatorname{SVect}(\Omega_0)$,

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{rot}(X \times Y) \cdot Z \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_0} (X \times Y) \cdot \operatorname{rot} Z \operatorname{vol}_{\mathbf{q}}, \quad \int_{\Omega_0} \operatorname{grad} h \cdot X \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = 0,$$

5. Montrer que l'équation d'Euler–Arnold redonne les équations d'Euler des fluides parfaits.

Solution de l'exercice 43

1. On a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho \|\mathbf{u}\|^2 \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \|\mathbf{V} \circ \varphi^{-1}\|^2 \rho \operatorname{vol}_{\mathbf{q}} = K(\varphi, \mathbf{V}).$$

2. $K(\varphi, \mathbf{V})$ définit la métrique riemannienne sur $\text{SDiff}(\Omega_0)$

$$\gamma_\varphi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{V}_1 \circ \varphi^{-1}) \cdot (\mathbf{V}_2 \circ \varphi^{-1}) \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

L'action à droite sur φ s'écrit $R_\psi \varphi = \varphi \circ \psi$, de sorte que $T_\varphi R_\psi \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \circ \psi$, $\mathbf{V} \in T_\varphi \text{SDiff}(\Omega_0)$. De plus, $\gamma_{\varphi \circ \psi}(T_\varphi R_\psi \cdot \mathbf{V}_1, T_\varphi R_\psi \cdot \mathbf{V}_2) = \gamma_\varphi(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ car

$$K(\varphi \circ \psi, T_\varphi R_\psi \cdot \mathbf{V}) = K(\varphi \circ \psi, \mathbf{V} \circ \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \|(\mathbf{V} \circ \psi) \circ (\varphi \circ \psi)^{-1}\|^2 \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = K(\varphi, \mathbf{V}).$$

La métrique riemannienne $\gamma_\varphi(\cdot, \cdot)$ est invariante à droite.

En $\varphi = \text{id}$, on a

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\text{id}} := \int_{\Omega_0} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in T_{\text{id}} \text{SDiff}(\Omega_0) = \text{SVect}(\Omega_0).$$

3. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{id}}$ coïncide avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{SVect}(\Omega_0)}$. L'opérateur d'inertie est donc l'identité : $A = I$.
4. On a $\text{ad}_X Y = \text{rot}(X \times Y)$, d'où

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_X Y, Z \rangle_{\text{SDiff}(\Omega_0)} &= \int_{\Omega_0} (\text{rot}(X \times Y)) \cdot Z \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}} \\ &= \int_{\Omega_0} (X \times Y) \cdot \text{rot } Z \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_0} (\text{rot } Z \times X) \cdot Y \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

car

$$\int_{\Omega_0} \text{rot}(X \times Y) \cdot Z \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_0} (X \times Y) \cdot \text{rot } Z \rho \, \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

L'adjoint ad_X^T est défini implicitement par

$$\langle \text{ad}_X Y, Z \rangle_{\text{SDiff}(\Omega_0)} = \langle Y, \text{ad}_X^T Z \rangle_{\text{SDiff}(\Omega_0)}.$$

Or le candidat $\text{rot } Z \times X$ obtenu ci-dessus n'est pas a priori de divergence nulle (et n'appartient donc pas à $\text{SVect}(\Omega_0)$). On peut toutefois le corriger en lui ajoutant un gradient, *i.e.*,

$$\text{ad}_X^T Z = \text{rot } Z \times X + \text{grad } h \in \text{SVect}(\Omega_0),$$

qui nous donnera la solution du problème si la fonction h est choisie telle que

$$\Delta h = \text{div}(X \times \text{rot } Z), \quad \text{grad } h \cdot \mathbf{n} = (X \times \text{rot } Z) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

5. Il s'agit du cas d'une métrique riemannienne γ invariante à droite sur le groupe $G = \text{SDiff}(\Omega_0)$. L'équation d'Euler–Arnold devient

$$\partial_t \mathbf{u} = -b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -\text{ad}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} - \text{grad } h, \quad u_R = \mathbf{u} \in \mathfrak{g} = \text{SVect}(\Omega_0).$$

On retrouve l'équation d'Euler de la mécanique des fluides parfaits, ainsi que la contrainte

$$\Delta h = \text{div}(\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}),$$

due à l'incompressibilité.

Références

- [1] E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 40 :325–412, 1923.
- [2] E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (Suite). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 41 :1–25, 1924.
- [3] E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 42 :17–88, 1925.
- [4] R. Coquereaux and G. Esposito-Farese. The theory of Kaluza-Klein-Jordan-Thiry revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 52(2) :113–150, 1990.
- [5] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 966–972, Jan. 1921.
- [6] O. Klein. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118(2971) :516–516, Oct. 1926.
- [7] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12) :895–906, Dec. 1926.
- [8] A. Lichnerowicz. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Relativité générale et théories unitaires*. Masson et Cie, Paris, 1955.
- [9] J.-M. Souriau. *Géométrie et relativité*. Enseignement des Sciences, VI. Hermann, Paris, 1964.
- [10] J.-M. Souriau. Milieux continus de dimension 1,2 ou 3 : Statique et dynamique. Congrès Français de Mécanique, Poitiers, 1997.
- [11] P. S. Wesson. *Five-dimensional physics : classical and quantum consequences of Kaluza-Klein cosmology*. 2006.